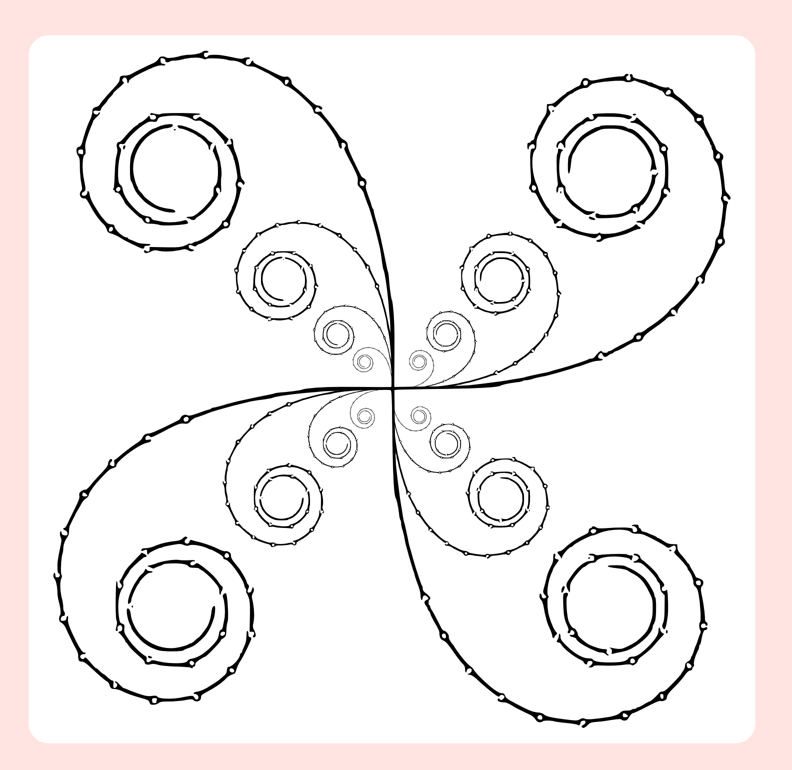
I. Irodov, I. Saveliev, O. Zamcha

RECUEIL DE PROBLÈMES PHYSIQUE GÉNÉRALE



Éditions Mir Moscou

И. Е. ИРОДОВ, И. В. САВЕЛЬЕВ, О. И. ЗАМША

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

(под редакцией И. В. Савельева)

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

I. IRODOV, I. SAVÉLIEV, O. ZAMCHA

RECUEIL DE PROBLÈMES DE PHYSIQUE GÉNÉRALE

Sous la rédaction
de I. Savéliev

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

Traduit du russe
par V. Platonov

На французском языке

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

Le Recueil de problèmes de physique générale que nous recommandons à l'attention du lecteur est le résultat de l'activité pédagogique des auteurs qui enseignent depuis plusieurs années à l'Institut des ingénieurs physiciens de Moscou.

Le Recueil contient peu de problèmes dont la résolution n'exigerait pas d'ingéniosité. La plupart des problèmes ne peuvent être résolus qu'après quelques réflexions et l'étude approfondie du matériel théorique. Les problèmes les plus difficiles sont munis de remarques ou même de solutions détaillées. Pour que le lecteur puisse résoudre de tels problèmes lui-même, les indications méthodiques sont données en règle générale dans les Réponses. Le lecteur ne doit s'y adresser qu'après quelques tentatives infructueuses de résoudre le problème.

Les données initiales et les réponses tiennent compte de la précision des grandeurs correspondantes et des règles d'opérations sur les nombres approchés. Tous les calculs peuvent être effectués à l'aide de la règle à calcul de 25 cm. Pour cette raison les grandeurs initiales sont données à troisième chiffre significatif près.

Les parties 1, 4 et 5 ainsi que les Appendices sont rédigés par I. Irodov, l'Introduction et la partie 3 par I. Savéliev, la partie 2, par O. Zamcha.

Les auteurs

Avant d'aborder les problèmes
lisez attentivement cette Introduction!

INTRODUCTION

Quelques indications pour la résolution des problèmes

En résolvant un problème, il est recommandé de suivre les prescriptions suivantes.

1. Tout d'abord il faut bien assimiler l'énoncé du problème. Au besoin, faire un croquis élucidant les traits essentiels du problème.

2. A quelques exceptions près, le problème doit d'abord être résolu sous la forme générale (sans application numérique), en exprimant la grandeur inconnue à l'aide des grandeurs données. La solution sous la forme générale obtenue, on est tenu à en vérifier la dimension et, si possible, faire l'étude du comportement de la solution aux cas limites. Par exemple, dans le problème relatif au mouvement d'un projectile tiré sous un angle à l'horizontale (problème 1.13) sont donnés la vitesse initiale v_0 et l'angle de tir α ainsi que l'accélération de la pesanteur g. L'altitude maximale h et la portée du tir l ont alors pour expression *):

$$h=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g},\quad l=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}.$$

On vérifie si les deux grandeurs ont la dimension de longueur comme on peut s'y attendre. Lorsque $\alpha=\pi/2$, on a $h=v_0^2/2g$, ce qui coïncide avec l'expression connue de l'altitude maximale atteinte par un projectile lancé verticalement vers le haut; l est alors nul, valeur correcte.

Lorsque la recherche des grandeurs inconnues s'effectue en résolvant un système de plusieurs équations encombrantes (comme, par exemple, il est souvent le cas des courants inconnus traversant des circuits dérivés compliqués), il convient de substituer d'abord les valeurs numériques des coefficients dans ces équations et, ensuite, déterminer les grandeurs inconnues.

---

*) Il est à noter que les deux expressions ne contiennent que les grandeurs données v_0, α et g. Il est possible d'écrire l'expression littérale de l sous la forme $l=v_0\cos\alpha\cdot\tau$, où τ est le temps du vol. Or, cette dernière expression ne peut être prise pour solution, τ n'appartenant pas aux grandeurs données et étant lui-même fonction de v_0 et de α.

3. Persuadé de la vraisemblance de la solution générale, on remplace les lettres par les valeurs numériques des grandeurs physiques correspondantes. Bien sûr, on doit exprimer toutes les grandeurs en unités d'un même système. Pour faciliter la détermination de l'ordre de grandeur du résultat il est commode de présenter les données sous la forme de nombres voisins de l'unité multipliés par une puissance de 10 (par exemple, au lieu de 247 on écrit $2{,}47 \cdot 10^2$, au lieu de 0,086, $0{,}86 \cdot 10^{-1}$, etc.). Les valeurs numériques portées, on procède aux calculs.

L'ordre recommandé de la résolution des problèmes permet, premièrement, d'éviter beaucoup de fautes et, deuxièmement, de révéler, au besoin, à quelle étape de la résolution : lors du remplacement des lettres par les valeurs numériques ou lors des calculs, l'erreur a été commise.

4. Il est à noter que les valeurs numériques des grandeurs physiques sont toujours approchées. C'est pourquoi les calculs se font suivant les règles des opérations sur les nombres approchés. En particulier, dans le résultat obtenu on doit conserver le dernier rang dont l'unité dépasse l'erreur absolue de la grandeur calculée. Tous les autres chiffres significatifs sont à rejeter.

5. Après avoir obtenu un résultat numérique il convient d'estimer son vraisemblance. Une telle estimation permet de révéler, dans nombre des cas, le résultat erroné. Par exemple, la vitesse d'une balle ne peut pas dépasser c (célérité de la lumière dans le vide), la portée de tir d'un caillou lancé par un homme ne sera jamais de l'ordre de 1000 m, la masse d'une molécule, de l'ordre de 1 mg, etc.

6. Comparez les résultats obtenus avec la réponse donnée à la fin du livre. Veillez à ce que non seulement les valeurs numériques coïncident (s'il y en a dans le problème considéré), mais aussi à ce que les solutions sous la forme générale le soient également. Il arrive parfois que les résultats numériques diffèrent si peu qu'on attribue cette différence à une certaine négligence lors des calculs, alors qu'en vérité, le problème est résolu incorrectement ; on peut s'en convaincre en comparant les expressions littérales.

Quelques règles des opérations sur les nombres approchés

1. En physique, il convient, outre la valeur numérique d'une certaine grandeur, de donner la précision qu'on doit lui attribuer. Par exemple, en écrivant $l = 356 \pm 2$ m, on indique que la valeur exacte de la longueur l est contenue dans l'intervalle de 354 à 358 m. A strictement parler, on doit également mentionner la probabilité de ce que la proposition avancée ait lieu (probabilité de confiance). Par ailleurs, on écrit souvent les valeurs numériques d'une grandeur physique sans indiquer son erreur (intervalle de confiance), par exemple $l = 356$ m. Dans ce cas on admet que l'erreur absolue ne dépasse pas une unité du dernier chiffre significatif (1 m dans notre

exemple). Par conséquent, tous les chiffres significatifs de la valeur d'une grandeur physique, excepté le dernier, sont considérés comme exacts; le dernier chiffre est alors incertain (la valeur vraie de ce chiffre peut différer d'une unité de la valeur indiquée).

Rappelons qu'on appelle chiffres significatifs d'un nombre approché tous les chiffres dans sa représentation décimale sauf les zéros se trouvant au début du nombre. Par exemple, les deux premiers zéros du nombre 0,03040 ne sont pas significatifs. Ils ne servent qu'à désigner le rang des autres chiffres. Par contre, les zéros après 3 et 4 sont significatifs.

S'il s'agit de grands nombres entiers se terminant par zéros (par exemple, 134 000), il faut préciser à quoi servent ces derniers: à indiquer les chiffres significatifs ou à déterminer le rang des autres chiffres. Pour lever cette indétermination, il convient d'écrire de tels nombres sous la forme $1,34 \cdot 10^5$, s'ils ont trois chiffres significatifs, sous la forme $1,340 \cdot 10^5$, s'ils en contiennent quatre, et ainsi de suite.

2. On appelle erreur absolue d'un nombre approché a la quantité

$$\Delta a = | A - a |,$$

où A est la valeur exacte du même nombre.

3. On appelle erreur relative d'un nombre approché a la quantité

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|A|}.$$

En physique, on a d'habitude affaire avec des nombres dont les valeurs exactes sont inconnues. Pour cette raison, on est contraint de définir en pratique l'erreur relative par la formule

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}.$$

L'erreur introduite est faible car, généralement, $A \approx a$.

4. Si une grandeur u est une fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

la borne d'erreur absolue de u se définit par la formule

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \Delta x_i,$$

Δx_i étant les bornes d'erreurs absolues des grandeurs x_i.

5. En divisant Δu par $|u|$, on obtient la borne d'erreur relative de la fonction u:

$$\delta u = \frac{\Delta u}{|u|} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln u \right| \Delta x_i.$$

Forme de la fonction	Borne d'erreur absolue Δu	Borne d'erreur relative δu
$u=\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\Delta u=\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$	—
$u=x_1-x_2$	$\Delta u=\Delta x_1+\Delta x_2$	$\delta u=\frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{\lvert x_1-x_2\rvert}$
$u=x_1x_2\ldots x_n$	$\Delta u=\lvert u\rvert\delta u$	$\delta u=\sum_{i=1}^{n}\delta x_i$
$u=\frac{x}{y}$	—	$\delta u=\delta x+\delta y$
$u=\frac{x_1x_2\ldots x_n}{y_1y_2\ldots y_m}$	—	$\delta u=\sum_{i=1}^{n}\delta x_i+\sum_{i=1}^{m}\delta y_i$
$u=x^m$	$\Delta u=m\lvert x^{m-1}\rvert\Delta x$	$\delta u=m\delta x$
$u=\sqrt[m]{x}$	—	$\delta u=\frac{1}{m}\delta x$
$u=\ln x$	$\Delta u=\frac{\Delta x}{x}=\delta x$	$\delta u=\frac{\delta x}{\lvert\ln x\rvert}$
$u=\lg x$	$\Delta u=\frac{1}{2{,}30}\frac{\Delta x}{x}=\frac{\delta x}{2{,}30}$	$\delta u=\frac{1}{2{,}30}\frac{\delta x}{\lvert\lg x\rvert}$
$u=e^{\pm\alpha x}$ $(\alpha>0)$	$\Delta u=\alpha e^{\pm\alpha x}\Delta x$	$\delta u=\alpha\Delta x$
$u=e^{f(x)}$	$\Delta u=e^{f(x)}\left\lvert\frac{df}{dx}\right\rvert\Delta x$	$\delta u=\left\lvert\frac{df}{dx}\right\rvert\Delta x$
$u=\sin mx$	$\Delta u=m\lvert\cos mx\rvert\Delta x$	$\delta u=m\lvert\operatorname{ctg} mx\rvert\Delta x$
$u=\cos mx$	$\Delta u=m\lvert\sin mx\rvert\Delta x$	$\delta u=m\lvert\operatorname{tg} mx\rvert\Delta x$
$u=\operatorname{tg} mx$	$\Delta u=\frac{m}{\cos^2 mx}\Delta x$	$\delta u=\frac{2m}{\lvert\sin 2mx\rvert}\Delta x$

6. Les *Tableaux 1* et *2* regroupent les expressions des bornes d'erreurs absolue Δu et relative δu pour certaines fonctions. On entend sous Δx_i et δx_i respectivement les bornes d'erreurs absolue et relative de la grandeur x_i.

7. Considérons un exemple sur le calcul de l'erreur du résultat d'un problème. Prenons le problème, déjà mentionné, du mouvement d'un projectile lancé sous un angle à l'horizontale. L'altitude maximale atteinte est donnée par la formule

$$h=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

En nous servant des formules du *Tableau 1*, trouvons l'expression

Forme de la fonction	Δu, δu
$u=f_1(x_1)+f_2(x_2)+\ldots+f_n(x_n)$	$\Delta u=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta f_i$
$u=f_1(x_1)f_2(x_2)\ldots f_n(x_n)$	$\delta u=\sum\limits_{i=1}^{n}\delta f_i$
$u=\dfrac{f_1(x_1)\,f_2(x_2)\ldots f_n(x_n)}{\varphi_1(y_1)\,\varphi_2(y_2)\ldots\varphi_m(y_m)}$	$\delta u=\sum\limits_{i=1}^{n}\delta f_i+\sum\limits_{k=1}^{m}\delta\varphi_k$
$u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\pm$ $\pm\,\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$\Delta u=\sum\limits_{i=1}^{n}\left\lvert\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\pm\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\rvert\Delta x_i$
$u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\pm$ $\pm\,\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_m)$	$\Delta u=\Delta f+\Delta\varphi$
$u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_m)$	$\delta u=\delta f+\delta\varphi$
$u=f_1f_2\ldots f_m$ (chaque f_i est une fonction des variables x_1, x_2, $\ldots$, x_n)	$\delta u=\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\left\lvert\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{f_i}\,\dfrac{\partial f_i}{\partial k_k}\right\rvert\Delta x_k\right\}$
$u=\dfrac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$	$\delta u=\sum\limits_{k=1}^{n}\left\lvert\dfrac{1}{f}\,\dfrac{\partial f}{\partial x_k}-\dfrac{1}{\varphi}\,\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right\rvert\Delta x_k$
$u=\dfrac{f_1f_2\ldots f_m}{\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_p}$ (chaque f_i et φ_j est une fonction des variables x_1, x_2, $\ldots$, x_n)	$\delta u=\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\left\lvert\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{f_i}\,\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}-\sum\limits_{j=1}^{p}\dfrac{1}{\varphi_j}\,\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}\right\rvert\Delta x_k\right\}$

pour la borne d'erreur relative de h

$$\delta h=2\delta v_0+2\delta(\sin\alpha)+\delta g=2\delta v_0+2\,\lvert\operatorname{ctg}\alpha\rvert\,\Delta\alpha+\delta g$$

(le nombre 2 au dénominateur est exact ; son erreur est nulle).

Soit $v_0=95$ m/s, $\alpha=45°$; adoptons pour g la valeur de 9,81 m/s². Alors on a $\Delta v_0=1$ m/s (une unité du dernier chiffre significatif), $\delta v_0=1/95$, $\Delta\alpha=1°=1/57$ rd, $\delta g=1/981\approx 0{,}001$. Mettons ces valeurs dans la formule de δh ($\operatorname{cotg}45°=1$) :

$$\delta h=\frac{2}{95}+\frac{2}{57}+0{,}001\approx\frac{1}{20}\sim 5\%.$$

Notons qu'il n'est pas nécessaire de prendre la valeur de g à trois chiffres significatifs. Si l'on augmente l'erreur de δg jusqu'à 2/980

(i.e. en adoptant $g = 9{,}8$ m/s^2), on n'influe pratiquement pas sur la précision du résultat tandis que les calculs deviennent plus simples.

Calculons maintenant h:

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{95^2 \cdot 0{,}707^2}{2 \cdot 9{,}8} = 2{,}3 \cdot 10^2 \text{ m.}$$

Il n'est pas légitime d'écrire ce résultat sous la forme de 230 m, cette dernière signifiant alors que l'erreur de la valeur trouvée de h ne dépasse pas 1 m. Or, on a déjà établi que pour une précision donnée de v_0 et de α l'altitude h ne peut être calculée avec une erreur relative supérieure à 5 %, i.e. avec une erreur absolue inférieure à 10 m.

PREMIÈRE PARTIE

MÉCANIQUE

Cinématique

1.1. En descendant une rivière, un canot a dépassé un radeau au point A. $\tau = 60$ mn après, il a rebroussé chemin et a rencontré le radeau à la distance $l = 6{,}0$ km en aval du point A. Déterminer la vitesse du courant si le moteur du canot fonctionnait au même régime dans les deux sens du mouvement.

1.2. Une automobile lancée sans vitesse initiale sur une voie rectiligne se meut d'abord avec une accélération $w = 5{,}0$ m/s^2, ensuite roule uniformément et enfin, ayant subi la décélération de la même valeur w s'arrête. Le temps total du mouvement est $\tau = 25$ s. La vitesse moyenne dans cet intervalle de temps est $\langle v \rangle = 72$ km/h. Quelle est la durée du mouvement uniforme?

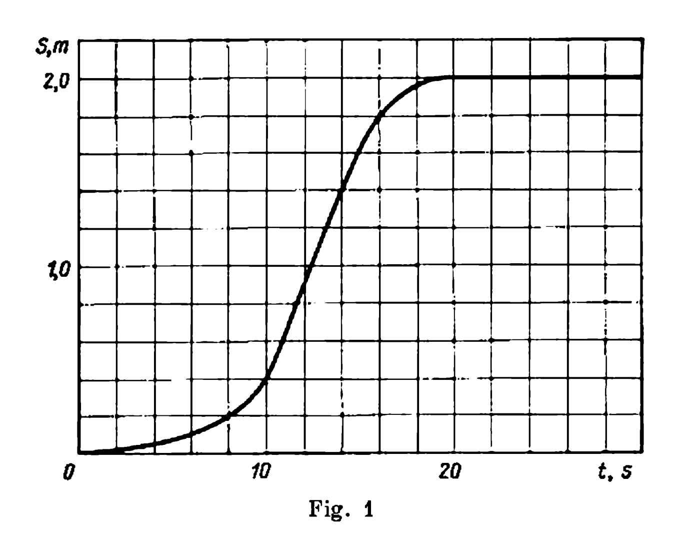


Fig. 1

1.3. Un point se déplace suivant une droite dans un sens. La figure 1 représente le graphique du chemin s parcouru par ce point en fonction du temps t. Déterminer à partir de ce diagramme:

a) la vitesse moyenne du mouvement ;

b) la vitesse maximale ;

c) l'instant t_0 où la vitesse instantanée égale la vitesse moyenne pendant t_0 premières secondes ;

d) l'accélération moyenne pendant les premières 10 et 16 s.

1.4. Deux particules *1* et *2* se déplacent avec les vitesses constantes $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. Au moment initial leurs rayons vecteurs étaient $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$. Quelle doit être la relation entre ces quatre vecteurs pour que les particules entrent en collision?

1.5. Un bateau se déplace le long de l'équateur vers l'Est avec la vitesse $v_0 = 30$ km/h. Dans la direction Sud-Est sous un angle $\varphi = 60°$ à l'équateur souffle un vent avec la vitesse $v = 15$ km/h. Déterminer, dans un référentiel lié au bateau, la vitesse v' du vent par rapport au bateau et l'angle φ' que fait la direction du vent avec l'équateur.

1.6. Deux nageurs partis du point A d'une rive d'un fleuve doivent atteindre le point B sur l'autre rive situé directement en face du premier. Pour ce faire, l'un d'eux suit la droite AB tandis que l'autre nage toujours perpendiculairement au courant en couvrant à pied la distance, à laquelle il est emportée, avec une vitesse u. Pour quelle valeur de u les deux hommes atteindront le point B au bout du même temps si la vitesse du courant est $v_0 = 2{,}0$ km/h et la vitesse de chaque nageur par rapport à l'eau $v' = 2{,}5$ km/h?

1.7. Deux canots A et B partent d'une bouée située au milieu d'une large rivière et se déplacent le long des droites perpendiculaires : le canot A longe la rivière, le canot B la traverse. S'étant éloignés à la même distance l de la bouée, les canots y reviennent ensuite. Trouver le rapport des durées du mouvement des canots τ_A/τ_B, la vitesse de chaque canot par rapport à l'eau étant $\eta = 1{,}2$ fois supérieure à celle du courant.

1.8. Deux corps sont lancés simultanément d'un même point : l'un verticalement vers le haut avec une vitesse $v = 25$ m/s, l'autre sous un angle $\vartheta = 60°$ à l'horizontale. Déterminer la distance entre les corps dans $t = 1{,}70$ s sans tenir compte de la résistance de l'air.

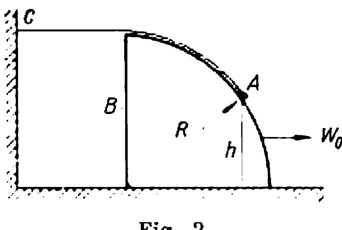


Fig. 2

1.9. Deux particules se déplacent avec une accélération $\mathbf{g}$ dans un champ de pesanteur uniforme. Au moment initial, les particules se trouvaient en un même point et avaient des vitesses $v_1 = 3{,}0$ m/s et $v_2 = 4{,}0$ m/s dirigées horizontalement dans les sens opposés. Déterminer la distance séparant les particules au moment où leurs vecteurs vitesses feront un angle droit.

1.10. Dans le dispositif de la fig. 2 le corps B est déplacé avec une accélération constante $w_0 = 40$ cm/s^2 par rapport au sol ; un petit corps A lié au point C par un fil inextensible monte le long

de la surface cylindrique du corps B, dont le rayon est R. En supposant qu'à l'instant initial le corps A est au repos à la hauteur h, déterminer le module de l'accroissement de vecteur accélération du corps A par rapport au sol pendant son glissement sur le corps B.

1.11. Un train long de $l = 350$ m se met en marche sur une voie rectiligne avec une accélération constante $w = 3{,}0 \cdot 10^{-2}$ m/s². Après $t = 30$ s du mouvement on allume le phare de la locomotive (événement 1) et $\tau = 60$ s après cela, une lampe à la queue du train (événement 2). Trouver la distance de ces événements dans les référentiels liés au train et à la Terre. Comment et avec quelle vitesse constante par rapport à la Terre doit se déplacer un certain référentiel K pour que les deux événements y aient lieu en un même point?

1.12. Une cage d'ascenseur, dont la distance entre le plancher et le plafond est de 2,7 m, se met à monter avec une accélération constante de 1,2 m/s². 2,0 s après le départ un boulon se détache du plafond. Déterminer:

a) la durée de la chute libre du boulon;

b) l'entraînement et le chemin du boulon pendant la chute libre dans le référentiel lié au puits d'ascenseur.

1.13. Deux particules *1* et *2* se déplacent avec les vitesses constantes v_1 et v_2 le long de deux droites orthogonales vers le point d'intersection O de ces dernières. Au moment $t = 0$, les particules se trouvaient aux distances l_1 et l_2 du point O. Dans combien de temps la distance des particules deviendra minimale? Quelle est cette distance?

1.14. Une automobile partant du point A de la route (fig. 3) doit atteindre le point B situé dans un champ à la distance l de la

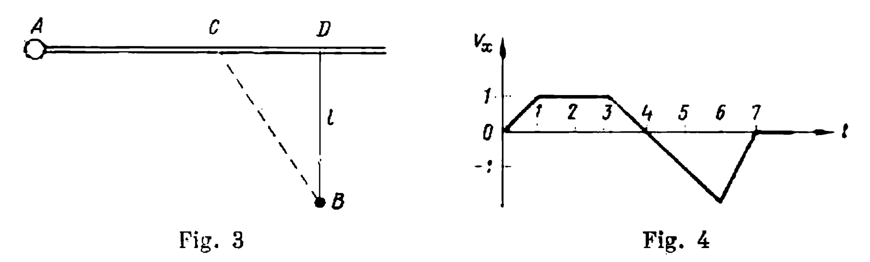


Fig. 3 Fig. 4

route dans un temps minimal. La vitesse de l'automobile sur le champ est η fois plus petite que sur la route. A quelle distance du point D faut-il quitter la route?

1.15. Un point suit l'axe des x avec une vitesse dont la projection v_x en fonction du temps est représentée par le graphique de la fig. 4. Etant donné qu'au moment $t = 0$ l'abscisse du point est $x = 0$, tracer les diagrammes approximatifs de l'accélération w_x, de l'abscisse x et du chemin parcouru s en fonction du temps.

1.16. Un point parcourt une demi-circonférence de rayon $R = 160$ cm en un temps $\tau = 10{,}0$ s. Quels sont dans cet intervalle de temps:

a) la vitesse moyenne $\langle v \rangle$;

b) le module du vecteur vitesse moyenne $|\langle \mathbf{v} \rangle|$;

c) le module du vecteur accélération résultante moyenne $|\langle \mathbf{w} \rangle|$, si le point avait une accélération tangentielle constante.

1.17. Le rayon vecteur d'une particule varie en fonction du temps d'après la loi $\mathbf{r} = \mathbf{a}t(1 - \alpha t)$ où $\mathbf{a}$ est un vecteur constant, α une constante positive. Déterminer:

a) la vitesse $\mathbf{v}$ et l'accélération $\mathbf{w}$ de la particule en fonction du temps;

b) l'intervalle de temps Δt au bout duquel le point regagne le point de départ, ainsi que le chemin s parcouru pendant ce temps.

1.18. A l'instant $t = 0$ une particule part de l'origine des coordonnées dans le sens positif de l'axe des x. Sa vitesse varie en fonction du temps d'après la loi $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(1 - t/\tau)$ où $\mathbf{v}_0$ est le vecteur vitesse initiale ($v_0 = 10{,}0$ cm/s), $\tau = 5{,}0$ s. Déterminer:

a) l'abscisse x de la particule aux instants 6,0, 10 et 20 s;

b) les instants où la particule se trouve à la distance 10,0 cm de l'origine des coordonnées;

c) le chemin s parcouru par la particule au bout des premières 4,0 et 8,0 s, tracer le diagramme approximatif $s(t)$.

1.19. Une particule se déplace dans le sens positif de l'axe des x avec une vitesse telle que $v = a\sqrt{x}$ où a est une constante positive. Etant donné qu'à l'instant $t = 0$ la particule se trouvait au point $x = 0$, déterminer:

a) la vitesse et l'accélération de la particule en fonction du temps;

b) la vitesse moyenne de la particule dans l'intervalle de temps mis au parcours de $x = 0$ à x.

1.20. Un point est animé d'un mouvement retardé sur une droite avec une accélération dont le module dépend de la vitesse v conformément à l'équation $w = a\sqrt{v}$ où a est une constante positive. Au moment initial la vitesse du point est v_0. Quel chemin couvrira-t-il avant l'arrêt? Temps mis à parcourir ce chemin?

1.21. Le rayon vecteur d'un point A relativement à l'origine des coordonnées varie en fonction du temps t d'après la loi $\mathbf{r} = at\,\mathbf{i} - bt^2\,\mathbf{j}$ où a et b sont des constantes positives, $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$, les vecteurs unités des axes x et y. Déterminer:

a) l'équation de la trajectoire du point $y(x)$; tracer son graphique;

b) la vitesse $\mathbf{v}$, l'accélération $\mathbf{w}$ et leurs modules en fonction du temps;

c) l'angle α entre les vecteurs $\mathbf{w}$ et $\mathbf{v}$ en fonction du temps;

d) le vecteur vitesse moyenne pendant t premières secondes du mouvement et le module de ce vecteur.

1.22. Le mouvement d'un point dans un plan xy est décrit par la loi: $x = at$, $y = at(1 - \alpha t)$ où a et α sont des constantes positives, t le temps. Déterminer:

a) l'équation de la trajectoire du point $y(x)$; représentez-la graphiquement ;

b) la vitesse v et l'accélération w du point en fonction du temps ;

c) l'instant t_0 où le vecteur vitesse fait un angle $\pi/4$ avec le vecteur accélération.

1.23. Un point est animé, dans le plan xy, d'un mouvement dont la loi est : $x = a \sin \omega t$, $y = a(1 - \cos \omega t)$ où a et ω sont des constantes positives. Déterminer :

a) le chemin s parcouru par le point en un temps τ ;

b) l'angle entre le vecteur vitesse et le vecteur accélération du point.

1.24. Une particule se déplace dans un plan xy avec une accélération constante $\mathbf{w}$ dont le sens est opposé au sens positif de l'axe des y. L'équation de la trajectoire de la particule a la forme $y = ax - bx^2$ où a et b sont des constantes positives. Trouver la vitesse de la particule à l'origine des coordonnées.

1.25. Un petit objet est lancé sous un angle à l'horizontale avec une vitesse initiale $\mathbf{v}_0$. En supposant nulle la résistance de l'air, déterminer :

a) le déplacement du corps en fonction du temps $\mathbf{r}(t)$;

b) le vecteur vitesse moyenne $\langle \mathbf{v} \rangle$ pendant les premières t secondes et pendant toute la durée du mouvement.

1.26. Un corps est lancé depuis le sol avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle α avec l'horizontale. Déterminer, en négligeant la résistance de l'air :

a) la durée du mouvement ;

b) la hauteur et la portée maximales ; l'angle de tir α pour lequel elles seront égales ;

c) l'équation de la trajectoire $y(x)$ où y et x sont respectivement les déplacements vertical et horizontal du corps ;

d) les rayons de courbure à l'origine et au sommet de la trajectoire.

1.27. En se référant à l'énoncé du problème précédent, représenter les graphiques approximatifs, en fonction du temps, des modules des vecteurs vitesse, accélérations normale et tangentielle ainsi que de la projection du vecteur accélération résultante sur la direction du vecteur vitesse.

1.28. Le canon et la cible distants de 5,10 km sont situés au même niveau. Au bout de combien de temps un obus lancé avec une vitesse initiale de 240 m/s atteindra la cible, la résistance de l'air étant supposée nulle?

1.29. Deux obus sont lancés successivement par un canon avec la vitesse $v_0 = 250$ m/s ; l'un sous un angle de tir $\vartheta_1 = 60°$, l'autre sous un angle de tir $\vartheta = 45°$ (le plan de tir étant le même). En négligeant la résistance de l'air, déterminer l'intervalle de temps séparant les deux tirs tel que les obus se rencontrent.

1.30. Un ballon monte depuis la surface de la Terre. La vitesse constante d'ascension est égale à v_0. Le vent communique au ballon

une composante horizontale de la vitesse $v_x = ay$ où a est une constante, y, l'altitude. Déterminer en fonction de l'altitude:

a) la valeur de l'entraînement du ballon $x(y)$;

b) ses accélérations résultante, tangentielle et normale.

1.31. Une particule se déplace dans le plan xy avec la vitesse $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$ où $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ sont les vecteurs unités des axes x et y, a et b des constantes. A l'instant initial, la particule se trouve au point $x = y = 0$. Déterminer:

a) l'équation de la trajectoire de la particule $y(x)$;

b) le rayon de courbure de la trajectoire en fonction de x.

1.32. Une particule A suit une certaine trajectoire donnée avec une accélération tangentielle $\mathbf{w}_\tau = \mathbf{a}\boldsymbol{\tau}$, où $\mathbf{a}$ est un vecteur constant

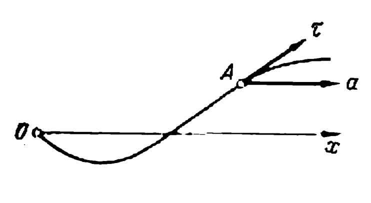


Fig. 5

coïncidant en direction avec l'axe des x (fig. 5) et $\boldsymbol{\tau}$ le vecteur unité coïncidant en direction avec le vecteur vitesse au point donné. Déterminer la vitesse de la particule en fonction de x si au point $x = 0$ sa vitesse est négligeable.

1.33. Un point se déplace suivant une circonférence avec la vitesse $v = at$ où $a = 0{,}50$ m/s². Calculer son accélération résultante au moment où elle parcourra $n = 0{,}10$ de la longueur de la circonférenc à partir du commencement du mouvement.

1.34. Un mouvement retardé d'un point suivant une circonférence de rayon R est tel qu'à chaque instant ses accélérations tangentielle et normale sont égales en module. A l'instant initial $t = 0$ la vitesse du point est égale à v_0. Déterminer:

a) la vitesse du point en fonction du temps et du chemin parcouru s;

b) l'accélération résultante en fonction de la vitesse et du chemin parcouru.

1.35. Un point se déplace suivant un arc de circonférence de rayon R. Sa vitesse dépend du chemin parcouru s d'après la loi $v = a\sqrt{s}$ où a est une constante. Calculer l'angle α que fait le vecteur accélération résultante avec le vecteur vitesse en fonction de s.

1.36. Le mouvement d'une particule suivant un arc de circonférence de rayon R est régi par la loi $l = a \sin \omega t$ où l est le déplacement depuis la position initiale compté le long de l'arc, a et ω, des constantes. En posant $R = 1{,}00$ m, $a = 0{,}80$ m et $\omega = 2{,}00$ rd/s, déterminer:

a) l'accélération résultante de la particule aux points $l = 0$ et $l = \pm a$;

b) la valeur minimale de l'accélération résultante w_{min} et le déplacement l_m qui lui correspond.

1.37. Un point est animé, dans un plan, d'un mouvement tel que son accélération tangentielle $w_\tau = a$ et son accélération normale $w_n = bt^4$, où a et b sont des constantes positives, t, le temps. Au moment $t = 0$ le point était au repos. Déterminer, en fonction du chemin parcouru s, le rayon de courbure ρ de la trajectoire du point et l'accélération résultante w.

1.38. Une particule se déplace suivant une trajectoire plane $y(x)$ avec une vitesse v constante en module. Déterminer l'accélération de la particule au point $x = 0$ et le rayon de courbure de la trajectoire en ce point si la trajectoire a la forme:

a) d'une parabole $y = ax^2$;

b) d'une ellipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

a et b sont ici des constantes.

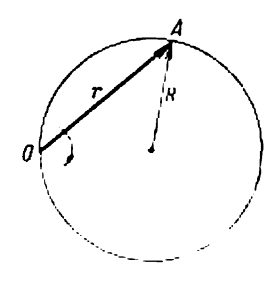


Fig. 6

1.39. Une particule A se déplace suivant une circonférence de rayon $R = 50$ cm de telle manière que son rayon vecteur **r** par rapport au point O (fig. 6) tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega = 0{,}40$ rd/s. Déterminer le module de la vitesse de la particule ainsi que le module et l'orientation de son vecteur accélération résultante.

1.40. Une roue tourne autour d'un axe immobile de telle manière que l'angle de rotation φ dépend du temps d'après la loi $\varphi = -at^2$ où $a = 0{,}20$ rd/s². Déterminer l'accélération résultante w du point A de la jante de la roue à l'instant $t = 2{,}5$ s si, à cet instant, la vitesse linéaire du point A est égale à $v = 0{,}65$ m/s.

1.41. Un solide est animé d'une rotation autour d'un axe fixe conformément à la loi $\varphi = at - bt^3$ où $a = 6{,}0$ rd/s, $b = 2{,}0$ rd/s³. Déterminer:

a) les valeurs moyennes de la vitesse angulaire et de l'accélération angulaire pendant l'intervalle de temps de $t = 0$ à l'arrêt;

b) l'accélération angulaire au moment où le solide s'arrête.

1.42. Un solide se met en rotation autour d'un axe fixe avec une accélération angulaire $\beta = at$ où $a = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ rd/s³. Dans combien de temps, à partir le début de la rotation, le vecteur accélération résultante d'un point quelconque du solide fera un angle $\alpha = 60°$ avec son vecteur vitesse?

1.43. Un solide animé d'une rotation autour d'un axe fixe ralentit avec une accélération angulaire $\beta \sim \sqrt{\omega}$ où ω est sa vitesse angulaire. Au moment initial on a communiqué au solide la vitesse angulaire ω_0. Calculer sa vitesse angulaire moyenne pendant le temps de la rotation.

1.44. Un solide tourne autour d'un axe fixe, sa vitesse angulaire étant fonction de l'angle de rotation φ telle que $\omega = \omega_0 - a\varphi$ où ω_0 et a sont des constantes positives. A l'instant $t = 0$ l'angle $\varphi = 0$. Déterminer en tant que fonctions du temps:

a) l'angle de rotation,

b) la vitesse angulaire.

1.45. Un solide se met à tourner autour d'un axe fixe avec l'accélération angulaire $\beta = \beta_0 \cos \varphi$ où β_0 est un vecteur constant, φ l'angle de rotation depuis la position initiale. Vitesse angulaire du solide en fonction de l'angle φ? Graphique de cette fonction?

1.46. Un disque animé d'une rotation (fig. 7) suit l'axe des x dans le sens positif. Etablir l'équation $y(x)$ donnant la position de

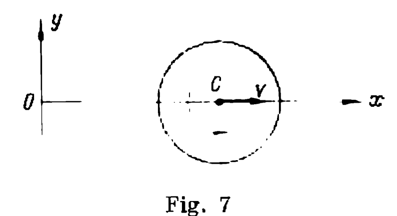


Fig. 7

l'axe de rotation instantané si à la date initiale l'axe C du disque se trouvait au point O et aux dates ultérieures il se déplace:

a) avec une vitesse constante v, alors que le disque se met à tourner sans vitesse angulaire initiale dans le sens contraire des aiguilles d'une montre avec une accélération angulaire constante β;

b) avec une accélération constante w (sans vitesse initiale), tandis que le disque tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre avec une vitesse angulaire constante ω.

1.47. Un point A est situé sur la jante d'une roue de rayon $R = 0{,}50$ m qui roule sans glissement sur une surface horizontale avec une vitesse $v = 1{,}00$ m/s. Déterminer:

a) le module et l'orientation du vecteur accélération du point A;

b) le chemin total parcouru par le point A entre ses deux contacts consécutifs avec la surface.

1.48. Une sphère du rayon $R = 10{,}0$ cm se met à rouler sans glissement le long d'un plan incliné de telle façon que son centre se déplace avec une accélération constante $w = 2{,}50$ cm/s^2. Après $t = 2{,}00$ s du mouvement sa position est celle de la fig. 8. Déterminer:

a) les vitesses des points A, B et O;

b) leurs accélérations.

1.49. Deux solides sont animés d'une rotation autour des axes fixes orthogonaux avec les vitesses angulaires constantes $\omega_1 = 3{,}0$ rd/s et $\omega_2 = 4{,}0$ rd/s. Calculer la vitesse angulaire et l'accélération angulaire d'un solide par rapport à l'autre.

1.50. Un solide tourne avec une vitesse angulaire $\omega = at\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j}$ où $a = 0{,}50$ rd/s², $b = 0{,}060$ rd/s³, $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ sont les vecteurs unités des axes x et y. Déterminer:

a) les modules de la vitesse et de l'accélération angulaires à la date $t = 10{,}0$ s;

b) l'angle que forment, à cette date, les vecteurs vitesse angulaire et accélération angulaire.

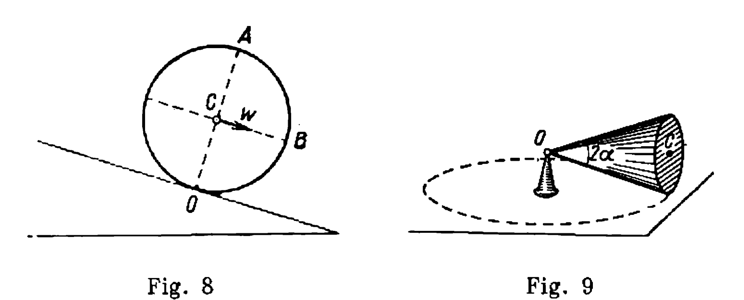


Fig. 8 Fig. 9

1.51. Un cône de révolution dont le demi-angle au sommet est $\alpha = 30°$ et le rayon de la base $r = 5{,}0$ cm roule uniformément sans glissement sur un plan horizontal comme le montre la fig. 9. Le sommet du cône est articulé au point O situé au même niveau que le point C, centre de la base du cône. La vitesse du point C est $v = 10{,}0$ cm/s. Déterminer:

a) le module du vecteur vitesse angulaire du cône et l'angle que fait ce vecteur avec la verticale;

b) le module du vecteur accélération du cône.

1.52. Un solide tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega_0 = 0{,}50$ rd/s autour d'un axe horizontal AB. A l'instant $t = 0$ on imprime à l'axe AB une rotation autour de la verticale avec une accélération angulaire constante $\beta_0 = 0{,}10$ rd/s². Déterminer la vitesse angulaire et l'accélération angulaire au bout du temps $t = 3{,}5$ s.

Equation fondamentale de la dynamique

1.53. Un aérostat de masse m se met à descendre avec une accélération constante w. Déterminer la masse du lest à jeter pour communiquer à l'aérostat l'accélération de même grandeur mais dirigée vers le haut. On néglige la résistance de l'air.

1.54. Dans le montage de la fig. 10 les masses des corps sont égales à m_0, m_1, m_2, les masses des poulies et des fils sont négligeables, le frottement dans la poulie est nul. Trouver l'accélération $\mathbf{w}$ avec laquelle descend le corps m_0 et la tension du fil reliant les corps m_1 et m_2 si le coefficient de frottement de ces corps sur la surface horizontale est k. Envisager des cas possibles.

1.55. Sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale sont placés deux corps en contact, *1* et *2* (fig. 11). Les masses des corps sont m_1 et m_2, les coefficients de frottement entre le plan incliné et les corps sont respectivement k_1 et k_2, $k_1 > k_2$. Déterminer :

a) la force d'interaction des corps au cours du mouvement ;

b) la valeur minimale de l'angle α correspondant à l'amorçage du glissement.

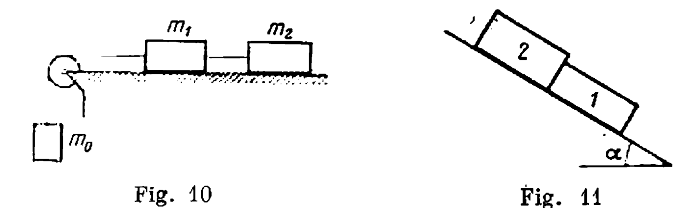


Fig. 10 Fig. 11

1.56. Un petit corps est lancé de bas en haut sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 15°$ avec l'horizontale. Déterminer le coefficient de frottement si le temps de la montée s'est trouvé $\eta = 2{,}0$ fois inférieur à celui de la descente.

1.57. Dans le montage de la fig. 12 on connaît l'angle α que fait le plan incliné avec l'horizontale ainsi que le coefficient de frottement k entre le corps m_1 et ce plan. Les masses de la poulie et du

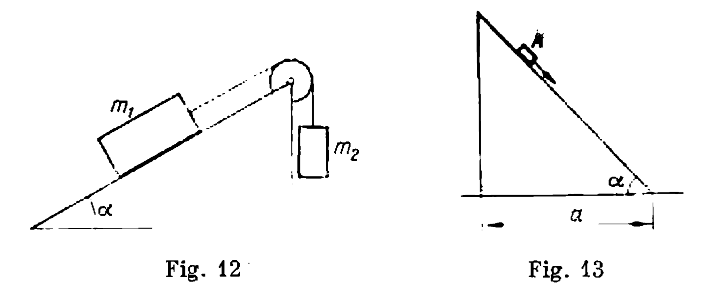


Fig. 12 Fig. 13

fil sont négligeables, le frottement dans la poulie nul. En supposant qu'à l'instant initial les deux corps sont immobiles, déterminer le rapport des masses m_2/m_1 tel que le corps m_2 :

a) se met à descendre ;

b) se met à monter ;

c) reste au repos.

1.58. Sur un plan horizontal lisse repose une planche de masse m_1 portant un corps de masse m_2. On applique au corps une force horizontale croissant avec le temps t d'après la loi $F = at$ où a est une constante. Déterminer, en fonction de t, les accélérations de la planche et du corps si le coefficient de frottement entre la planche et le corps est égal à k. Construire les graphiques approximatifs de ces fonctions.

1.59. Un petit corps A se met à glisser depuis le sommet d'un coin dont la base est $a = 2,10$ m (fig. 13). Coefficient de frottement entre le corps et la surface du coin $k = 0,140$. A quel valeur de l'angle α correspond le temps minimal de la descente? Quel est ce temps?

1.60. Un corps de masse m est traîné par un fil avec une vitesse constante sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale (fig. 14). Le coefficient de frottement est égal à k. Déterminer l'angle β que doit faire le fil avec le plan incliné pour que sa tension soit minimale. Quelle est cette tension?

1.61. Un petit corps de masse m reposant sur un plan horizontal lisse est sollicité, à l'instant $t = 0$, par une force dépendant du

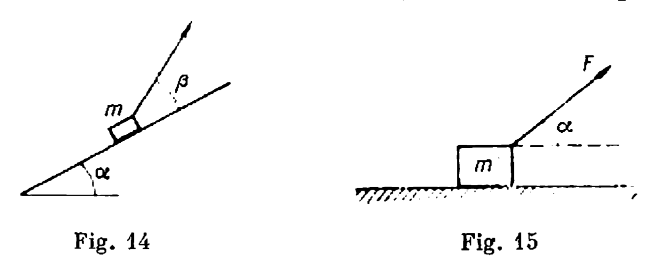


Fig. 14 Fig. 15

temps d'après la loi $F = at$ où a est une constante. La force fait constamment un angle α avec l'horizontale (fig. 15). Déterminer:

a) la vitesse du corps à l'instant où il quitte le plan;

b) le chemin parcouru par le corps à cette date.

1.62. Une force $F = mg/3$, constante en grandeur, est appliquée à un corps de masse m reposant sur un plan horizontal lisse. Au cours du déplacement rectiligne l'angle α que fait la force avec l'horizontale varie conformément à la loi $\alpha = as$ où a est une constante, s le chemin parcouru par le corps (depuis sa position initiale). Calculer la vitesse du corps au moment où l'angle $\alpha = \pi/2$.

1.63. Sur un plan horizontal se trouvent deux corps distants initialement de l: une pièce et un support portant un moteur électrique doté d'une pile. Sur la broche du moteur s'enroule un fil dont l'extrémité libre est attachée à la pièce. Une fois branché, le moteur électrique sollicite la pièce de se déplacer avec une accélération constante w. Le coefficient de frottement est k. La masse de la pièce étant deux fois celle du moteur, au bout de combien de temps la collision se produira-t-elle?

1.64. Une poulie fixée au plafond d'une cabine de l'ascenseur porte un fil reliant deux masses m_1 et m_2. La cabine monte avec une accélération w_0. En négligeant les masses de la poulie et du fil ainsi que le frottement, calculer:

a) les accélérations de la masse m_1 par rapport à la cage de l'ascenseur et la cabine;

b) la force agissant sur le plafond de la cabine de la part de la poulie.

1.65. Les corps du système représenté fig. 16 ont les masses m_0, m_1, m_2, le frottement est nul, les masses des poulies et des fils négligeables. Calculer l'accélération du corps m_1. Etudier les cas possibles.

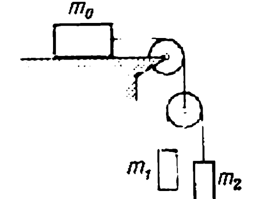


Fig. 16

1.66. Dans le dispositif (fig. 17) sont connues les masses de la tige M et de la bille m, $M > m$. La bille est percée d'un canal et peut glisser le long du fil avec un certain frottement. La masse de la poulie et le frottement dans son axe sont négligeables. A l'instant zéro, la bille se trouvait en face de l'extrémité inférieure de la tige. Abandonnés à eux-mêmes, les deux corps se sont mis en mouvement avec des accélérations constantes. Déterminer la force de frottement entre la bille et le fil si après t secondes de mouvement la bille s'est trouvée en face de l'extrémité supérieure de la tige. La longueur de la tige est l.

1.67. Dans le dispositif de la figure 18 la bille *1* a une masse $\eta = 1{,}8$ fois supérieure à celle de la tige *2*. La longueur de cette der-

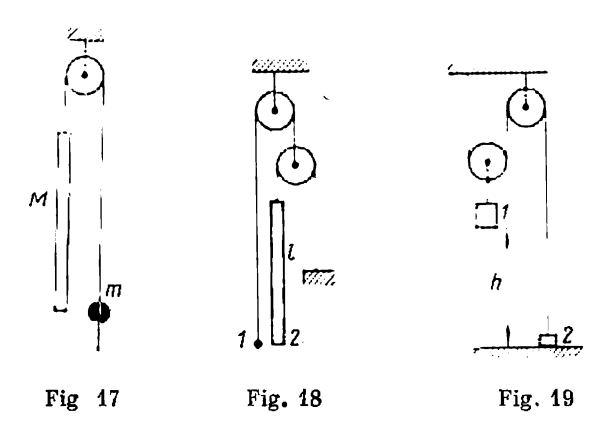


Fig 17 Fig. 18 Fig. 19

nière est $l = 100$ cm. Les masses des poulies et des fils ainsi que le frottement sont négligeables. On dispose la bille au niveau de l'extrémité inférieure de la tige. Le système laissé libre à se mouvoir, dans combien de temps la bille sera-t-elle au niveau de l'extrémité supérieure de la tige?

1.68. Dans le système de la figure 19 la masse du corps *1* est $\eta = 4{,}0$ fois supérieure à celle du corps *2*. La hauteur $h = 20$ cm. Les masses des poulies et des fils ainsi que le frottement sont négligeables. A un certain moment on lâche le corps *2* et le système se met en mouvement. Quelle hauteur maximale (par rapport au sol) atteindra le corps *2*?

1.69. La masse du coin M et du corps m du dispositif (fig. 20) sont connues. Le frottement n'a lieu qu'entre le coin et le corps m.

Le coefficient de frottement correspondant est k. Les masses des poulies et du fil sont négligeables. Déterminer l'accélération du corps m par rapport au plan horizontal sur lequel glisse le coin.

1.70. Quelle doit être l'accélération minimale à communiquer, dans le sens horizontal, à la pièce A (fig. 21) pour que les corps *1* et *2* ne se déplacent pas par rapport à elle? Les corps ont la même

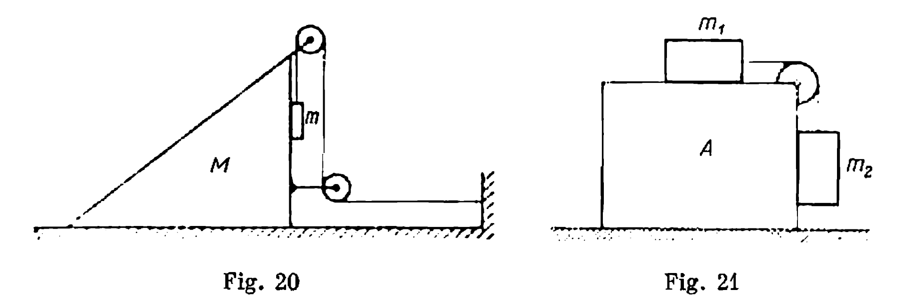


Fig. 20 Fig. 21

masse, le coefficient de frottement entre la pièce et les deux corps est k. Les masses de la poulie et des fils ainsi que le frottement dans la poulie sont nuls.

1.71. Le prisme *1* portant un corps *2* de masse m reçoit une accélération horizontale w dirigée vers la gauche (fig. 22). A quelle

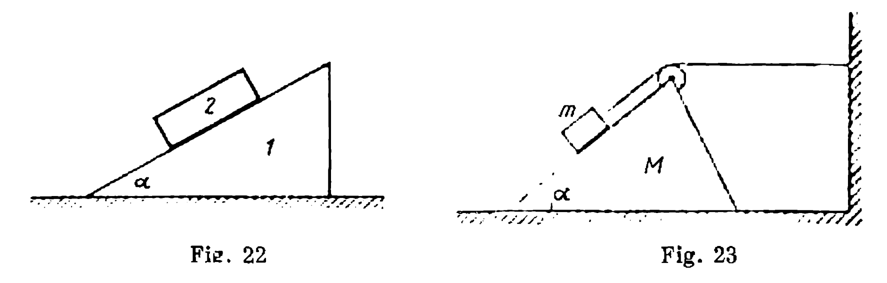


Fig. 22 Fig. 23

valeur maximale de cette accélération le corps restera-t-il encore immobile par rapport au prisme, le coefficient de frottement entre eux étant $k < \operatorname{cotg} \alpha$?

1.72. Le prisme *1* de masse m_1 et d'angle α portant le corps *2* de masse m_2 se trouve sur un plan horizontal (fig. 22). En négligeant le frottement, calculer l'accélération du prisme.

1.73. Dans le dispositif de la fig. 23 on connaît les masses du cube m et du coin M ainsi que l'angle α. Les masses de la poulie et du fil sont négligeables, le frottement nul. Calculer l'accélération du coin M.

1.74. Une particule de masse m se déplace suivant une circonférence de rayon R. Déterminer le module du vecteur force moyenne agissant sur la particule le long d'un chemin égal à un quart de circonférence si la particule se meut:

a) uniformément à la vitesse v;

b) à une accélération tangentielle constante w_τ sans vitesse initiale.

1.75. Un avion effectue une boucle de rayon $R = 500$ m à une vitesse constante $v = 360$ km/h. Quel est le poids apparent du pilote de masse $m = 70$ kg aux points inférieur, supérieur et médian de la boucle.

1.76. Une petite bille de masse m, suspendue à un fil, est écartée de manière que le fil fait un angle droit avec la verticale et abandonnée ensuite à elle-même. Calculer:

a) l'accélération résultante de la bille et la tension du fil en fonction de l'angle ϑ dont s'écarte le fil;

b) la tension du fil au moment où la composante verticale de la vitesse de la bille est maximale;

c) l'angle ϑ entre le fil et la verticale au moment où le vecteur accélération résultante de la bille est horizontal.

1.77. Une bille suspendue à un fil oscille dans un plan vertical, ses accélérations dans les positions extrême et inférieure étant égales en module. Déterminer l'angle dont s'écarte le fil dans la position extrême.

1.78. Un petit corps A se met à glisser du sommet d'une sphère lisse. Calculer l'angle ϑ (fig. 24) pour lequel le corps quittera la sphère et sa vitesse à ce moment.

1.79. Un dispositif (fig. 25) est constitué d'une tige lisse, en forme de Γ, située dans un plan horizontal et d'un petit manchon A

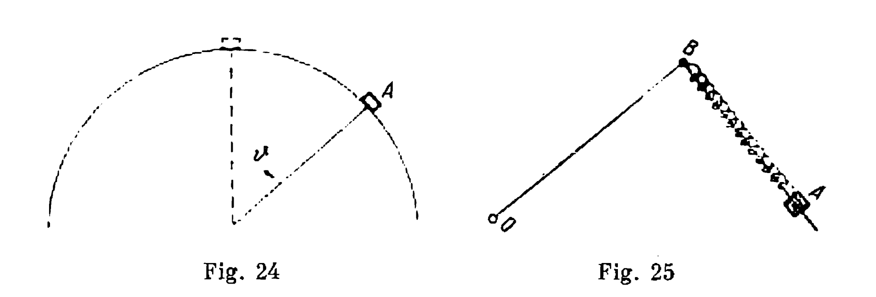


Fig. 24 Fig. 25

de masse m relié par un petit ressort à boudin sans poids avec le point B. La raideur du ressort est $\varkappa$. L'ensemble est animé d'une rotation à une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical passant par le point O. Calculer l'allongement relatif du ressort. Comment le sens de rotation influe-t-il sur le résultat?

1.80. Un cycliste tourne en rond sur un disque horizontal de rayon R. Le coefficient de frottement ne dépend que de la distance r au centre O du disque et est donné par la formule $k = k_0 (1 - r/R)$

où k_0 est une constante. Déterminer le rayon de la circonférence de centre en O que le cycliste peut aborder à une vitesse maximale. Quelle est cette vitesse?

1.81. Une chaînette de masse m formant une circonférence de rayon R est assujettie sur un cône de révolution lisse de demi-angle au sommet ϑ. Déterminer la tension de la chaînette si celle-ci est animée d'une rotation à une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical confondu avec l'axe de symétrie du cône.

1.82. Sur la gorge d'une poulie fixe passe un fil sans masse portant à ses extrémités les masses m_1 et m_2. Entre le fil et la poulie il y a frottement tel que le fil se met à glisser lorsque $m_2/m_1 = \eta_0$. Déterminer :

a) le coefficient de frottement ;

b) l'accélération des masses si $m_2/m_1 = \eta > \eta_0$.

1.83. Une particule de masse m se déplace sur la surface intérieure lisse d'un cylindre vertical de rayon R. Déterminer la force que la particule exerce sur la paroi du cylindre si au moment initial sa vitesse est v_0 et fait l'angle α avec l'horizontale.

1.84. Déterminer la grandeur et le sens de la force appliquée à une particule de masse m lors de son mouvement dans le plan xy conformément à la loi $x = a \sin \omega t$, $y = b \cos \omega t$ où a, b, ω sont des constantes.

1.85. Un corps de masse m est lancé sous un angle à l'horizontale avec la vitesse initiale $\mathbf{v}_0$. Déterminer, en négligeant la résistance de l'air :

a) l'accroissement de l'impulsion $\Delta\mathbf{p}$ du corps au bout de t premières secondes du mouvement ;

b) le module de l'accroissement de l'impulsion du corps au cours de toute la durée du mouvement.

1.86. A une particule de masse m au repos on a appliqué, à l'instant $t = 0$, une force donnée en fonction du temps t par la loi $\mathbf{F} = \mathbf{a}t(\tau - t)$, où $\mathbf{a}$ est un vecteur constant, τ le temps pendant lequel agit la force. Déterminer :

a) l'impulsion de la particule après l'action de la force ;

b) le chemin parcouru par la particule pendant que la force agit.

1.87. Une particule de masse m part au moment $t = 0$ sous l'action d'une force $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \sin \omega t$ où $\mathbf{F}_0$ et ω sont des constantes. Déterminer le chemin parcouru par la particule en fonction du temps t. Tracer le graphique approximatif de cette fonction.

1.88. Une particule de masse m part au moment $t = 0$ sous l'action de la force $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \cos \omega t$ où $\mathbf{F}_0$ et ω sont des constantes. Quel est le temps du mouvement avant le premier arrêt? Quelle est la distance parcourue par la particule pendant ce temps? Quelle est la vitesse maximale de la particule sur cette distance?

1.89. Un canot de masse m se déplace sur un lac à la vitesse v_0. A l'instant $t = 0$ on débraye. En supposant la résistance de l'eau

au mouvement du canot proportionnelle à sa vitesse, $\mathbf{F} = -r\mathbf{v}$, calculer:

a) la durée du mouvement du canot avec le moteur arrêté;

b) la vitesse en fonction du chemin parcouru par le canot avec le moteur coupé, ainsi que le chemin total jusqu'à l'arrêt;

c) la vitesse moyenne du canot dans l'intervalle de temps pendant lequel sa vitesse initiale diminue de η fois.

1.90. Une balle traversant une planche d'épaisseur h voit sa vitesse varier de v_0 à v. Trouver le temps du mouvement de la balle dans la planche en supposant la résistance de celle-ci étant proportionnelle au carré de la vitesse.

1.91. Un petit corps se met à glisser sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Le coefficient de frottement est donné, en fonction du chemin parcouru x, par la loi $k = ax$ où a est une constante. Calculer:

a) le chemin parcouru par le corps avant l'arrêt;

b) la vitesse maximale qu'il atteint sur ce parcours.

1.92. Sur un plan horizontal à coefficient de frottement k repose un corps de masse m. A l'instant $t = 0$ on lui applique une force horizontale donnée, en fonction du temps, par la formule $\mathbf{F} = \mathbf{a}t$ où $\mathbf{a}$ est un vecteur constant. Déterminer la distance parcourue par le corps dans t premières secondes d'action de cette force.

1.93. Un corps de masse m est lancé verticalement vers le haut avec une vitesse v_0. Trouver la vitesse du corps au moment où il tombe par terre si la force de résistance de l'air est égale à kv^2, où k est une constante, v, la vitess du corps.

1.94. Une particule de masse m se déplace dans un certain plan P sous l'action d'une force F constante en module et dont le vecteur tourne dans ce plan à la vitesse angulaire constante ω. En supposant la particule au repos à l'instant $t = 0$, déterminer:

a) sa vitesse en fonction du temps;

b) le chemin parcouru par la particule entre deux arrêts consécutifs ainsi que la vitesse moyenne pendant ce temps.

1.95. On a communiqué une vitesse initiale v_0 à une petite rondelle A posée sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale (fig. 26). Déterminer la vitesse de la rondelle en fonction de l'angle φ si le coefficient de frottement de glissement $k = \operatorname{tg} \alpha$ et à l'instant zéro $\varphi_0 = \pi/2$.

1.96. Sur une surface sphérique lisse de rayon R repose une chaînette de longueur l fixée par une extrémité au sommet de la sphère. Quelle accélération w acquerra chaque élément de la chaînette si l'on libère son extrémité supérieure?

1.97. Un petit corps est placé sur le sommet de la sphère lisse de rayon R. On communique ensuite à la sphère une accélération horizontale constante $\mathbf{w}_0$, et le corps se met à glisser vers le bas. Déterminer:

a) la vitesse du corps par rapport à la sphère au moment où il la quitte;

b) l'angle ϑ_0 entre la verticale et le rayon vecteur mené du centre de la sphère au point où le corps décolle; calculer ϑ_0 pour $w_0 = g$.

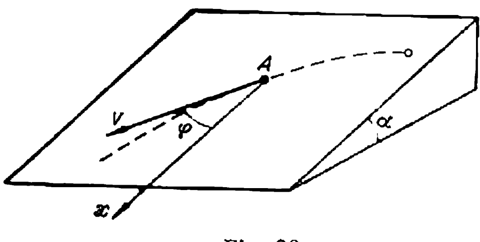


Fig. 26

1.98. Une particule de masse m décrit une circonférence dans un mouvement uniforme à la vitesse donnée v sous l'action d'une force $F = a/r^n$ où a et n sont des constantes, r, la distance du centre de la circonférence. Pour quelles valeurs de n le mouvement sur la circonférence sera-t-il stable? Rayon de cette circonférence?

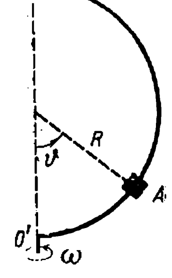


Fig. 27

1.99. Un petit manchon A glisse librement le long d'une tige lisse en forme d'un demi-cercle de rayon R (fig. 27). L'ensemble est mis en rotation à la vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical OO'. Déterminer l'angle ϑ correspondant à la position stable du manchon.

1.100. Un fusil est visé sur le trait vertical d'une cible située à la distance $s = 1$ km exactement vers le nord. En négligeant la résistance de l'air, déterminer de combien de centimètres et du quel côté le point d'impact s'écartera-t-il du trait. La balle est tirée horizontalement à la latitude $\varphi = 60°$, sa vitesse $v = 900$ m/s.

1.101. Un disque horizontal tourne à une vitesse angulaire constante $\omega = 6{,}0$ rd/s autour d'un axe vertical passant par son centre. Un petit corps de masse $m = 0{,}50$ kg se déplace le long d'un de ses diamètres à une vitesse $v' = 50$ cm/s constante par rapport au disque. Avec quelle force le disque agit-il sur ce corps au moment où celui-ci se trouve à la distance $r = 30$ cm de l'axe de rotation?

1.102. Une tige horizontale lisse AB tourne à une vitesse angulaire constante $\omega = 2{,}00$ rd/s autour d'un axe vertical passant par son extrémité A. Un petit corps de masse $m = 0{,}50$ kg glisse librement le long de la tige, partant du point A avec la vitesse initiale $v_0 = 1{,}00$ m/s. Calculer la force de Coriolis (dans le système de référence lié à la tige en rotation) au moment où le corps est à la distance $r = 50$ cm de l'axe de rotation.

1.103. Un disque horizontal de rayon R tourne à une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical fixe passant par son bord. Sur la périphérie du disque, une particule de masse m se déplace uniformément par rapport au disque. Au moment où la particule se trouve à la distance maximale de l'axe de rotation la résultante des forces d'inertie F_{in} s'exerçant sur elle dans le système de référence « disque » s'annule. Déterminer:

a) l'accélération w' de la particule par rapport au disque;

b) F_{in} en fonction de la distance à l'axe de rotation.

1.104. Un petit corps de masse $m = 0{,}30$ kg se met à glisser depuis le sommet d'une sphère lisse de rayon $R = 1{,}00$ m. La sphère est animée d'une rotation à une vitesse angulaire constante $\omega = 6{,}0$ rd/s autour d'un axe vertical passant par son centre. Quelles sont, dans le système de référence lié à la sphère, la force centrifuge d'inertie et la force de Coriolis au moment où le corps quitte la surface de la sphère?

1.105. Un train de masse $m = 2000$ t roule à la vitesse $v = 54$ km/h à la latitude $\varphi = 60°$. Déterminer la composante horizontale F de la force de pression sur les rails si le chemin suit:

a) un méridien;

b) une parallèle.

1.106. A l'équateur, un corps tombe (sans vitesse initiale par rapport à la Terre) de la hauteur $h = 500$ m sur la surface de la Terre. En négligeant la résistance de l'air, déterminer la valeur et la direction de l'écart de la verticale subi par le corps au cours de la chute?

Lois de la conservation de l'énergie, de l'impulsion et du moment cinétique

1.107. Une particule s'est déplacée suivant une certaine trajectoire dans le plan xy depuis le point *1* de rayon vecteur $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ m jusqu'au point *2* de rayon vecteur $\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ m. Elle se mouvait sous l'action des certaines forces dont une est $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ N. Calculer le travail effectué par la force $\mathbf{F}$.

1.108. Une locomotive de masse m démarre de la gare de manière que sa vitesse est donnée par la loi $v = a\sqrt{s}$ où a est une constante, s la distance parcourue. Calculer le travail total de toutes les forces agissant sur la locomotive accompli en premières t secondes après le démarrage.

1.109. L'énergie cinétique d'une particule se déplaçant suivant une circonférence de rayon R dépend du chemin parcouru conformément à la loi $T = as^2$ où a est une constante. Déterminer la force appliquée à la particule en tant que fonction de s.

1.110. Une chaînette longue de $l = 1{,}5$ m de masse $m = 0{,}8$ kg repose sur une table rugueuse de sorte que son extrémité pend du bord de la table. Lorsque la partie pendante constitue $\eta = 1/3$ de

sa longueur, la chaînette commence à glisser. Quel est le travail des forces de frottement, agissant sur la chaînette, fourni vers le moment où celle-ci quitte la table?

1.111. Un corps de masse m est lancé à la vitesse initiale v_0 sous un angle α à l'horizontale. Calculer la puissance moyenne développée par la force de la pesanteur pendant toute la durée du mouvement du corps et la puissance instantanée de cette force en fonction du temps.

1.112. Une particule de masse m se déplace suivant une circonférence de rayon R à l'accélération normale donnée, en fonction du temps, par $w_n = at^2$ où a est une constante. Calculer, en fonction du temps, la puissance de toutes les forces agissant sur la particule ainsi que la valeur moyenne de cette puissance dans l'intervalle de t premières secondes à partir de début du mouvement.

1.113. Un petit corps de masse m repose sur un plan horizontal en un point O. On lui communique une vitesse horizontale v_0. Déterminer:

a) la puissance moyenne développée par la force de frottement tout au long du mouvement si le coefficient de frottement $k = 0,27$, $m = 1,0$ kg et $v_0 = 1,5$ m/s;

b) la puissance instantanée maximale de la force de frottement si le coefficient de frottement est $k = \alpha x$ où α est une constante, x la distance du point O.

1.114. Un petit corps de masse $m = 0,10$ kg se déplace dans un système de référence animé d'une rotation autour d'un axe fixe à une vitesse angulaire constante $\omega = 5,0$ rd/s. Déterminer le travail fourni par la force d'inertie centrifuge lors du déplacement de ce corps du point *1* au point *2* situés respectivement à $r_1 = 30$ cm et $r_2 = 50$ cm de l'axe de rotation?

1.115. Un système se compose de deux ressorts, dont les raideurs sont respectivement k_1 et k_2, montés en série. Calculer le travail minimal nécessaire pour allonger ce système de Δl.

1.116. Un corps de masse m est soulevé de la surface de la Terre par une force **F** donnée en fonction de l'altitude y par $\mathbf{F} = 2(ay - 1)\,m\mathbf{g}$ où a est une constante positive. Calculer le travail de cette force et l'accroissement de l'énergie potentielle du corps sur la première moitié du chemin de l'ascension.

1.117. L'énergie potentielle d'une particule dans un certain champ a la forme $U = a/r^2 - b/r$ où a et b sont des constantes positives, r la distance du centre du champ. Déterminer:

a) la valeur r_0 correspondant à la position d'équilibre de la particule; vérifier si cette position est stable;

b) la valeur maximale de la force d'attraction; tracer les graphiques des fonctions $U(r)$ et $F_r(r)$, projection de la force sur le rayon vecteur **r**.

1.118. L'énergie potentielle d'une particule dans un certain champ de force plan a la forme $U = \alpha x^2 + \beta y^2$ où α et β sont des constantes positives non égales entre elles. Vérifier

a) si ce champ est central;

b) la forme des surfaces équipotentielles ainsi que celles des surfaces pour lesquelles le module du vecteur force F = const.

1.119. On a deux champs de force stationnaires:

1) $\mathbf{F} = ay\mathbf{i}$; 2) $\mathbf{F} = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j}$, où $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ sont les vecteurs unités des axes x et y, a et b constantes. Démontrer si ces champs sont potentiels.

1.120. Un corps de masse m est lancé vers le haut le long d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. La vitesse initiale du corps est v_0, le coefficient de frottement k. Quelle distance parcourra le corps avant l'arrêt et quel est le travail des forces de frottement sur ce parcours?

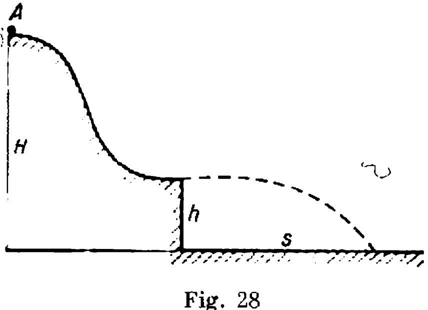


Fig. 28

1.121. Une petite rondelle A glisse sans vitesse initiale du sommet d'un monticule lisse de hauteur H suivi d'un tremplin horizontal (fig. 28). Pour quelle hauteur h du tremplin la rondelle couvrira-t-elle la plus grande distance s? Quelle est cette distance?

1.122. Un petit corps A part sans vitesse initiale de la hauteur h dans un caniveau incliné suivi d'un demi-cercle de rayon $h/2$

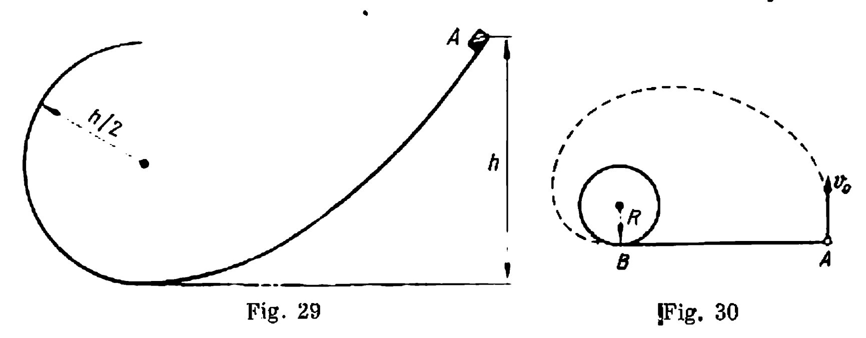


Fig. 29 Fig. 30

(fig. 29). En supposant le frottement nul déterminer la vitesse du corps au point le plus élevé de sa trajectoire (une fois le caniveau quitté).

1.123. Une bille de masse m est suspendue à un fil de longueur l. Avec quelle vitesse minimale doit-on déplacer dans le plan horizontal le point de suspension pour que la bille se mette à décrire une circonférence autour de ce point? Quelle est la tension du fil au moment où il passe par la position horizontale?

1.124. Sur un plan horizontal se trouvent un cylindre vertical fixe de rayon R et une rondelle A reliée à ce dernier par un fil horizontal AB de longueur l_0 (fig. 30 vue de dessus). La rondelle reçoit

une vitesse initiale v_0 comme l'indique la figure. Quel temps mettra-t-elle, en se déplaçant sur le plan, pour rencontrer le cylindre? Le frottement est nul.

1.125. Un fil élastique lisse de longueur l et de coefficient d'élasticité k est fixé au point O par une extrémité (fig. 31). L'autre extrémité est munie d'une butée B. Un manchon A de masse m est lâché du point O. En négligeant les masses du fil et de la butée, calculer l'élongation maximum du fil.

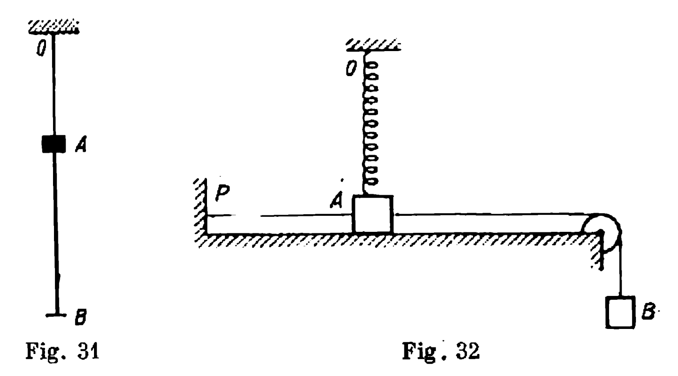


Fig. 31 Fig. 32

1.126. Un corps A repose sur un plan horizontal lisse. Il est relié par un fil au point P et par l'autre, passant par une poulie de masse négligeable, au corps B (fig. 32). Les masses des deux corps sont égales. Le corps A est relié en outre au point O par l'intermédiaire d'un ressort léger non déformé de longueur $l_0 = 50$ cm et de raideur $\varkappa = 5\ mg/l_0$ où m est la masse du corps A. Une fois le fil PA brûlé, le corps A se met en mouvement. Déterminer sa vitesse au moment où il quitte le plan.

1.127. Sur un plan horizontal repose une planche portant un corps de masse $m=1{,}0$ kg qui est relié au point O par un fil élastique léger non déformé de longueur $l_0=40$ cm (fig. 33). Le coefficient de frottement du corps sur la planche est $k = 0{,}20$. La planche est lentement déplacée vers la droite jusqu'à ce que le corps commence à glisser sur elle. A ce moment-là le fil est écarté de la verticale d'un angle $\vartheta = 30°$. Calculer, dans un référentiel lié au plan, le travail fourni vers ce moment par la force de frottement appliquée au corps.

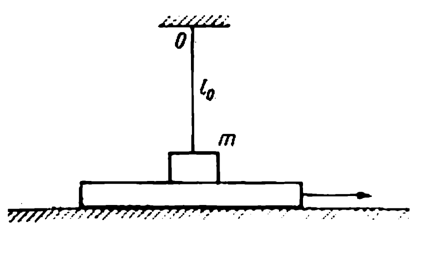


Fig. 33

1.128. Une tige horizontale lisse de masse négligeable AB peut tourner autour d'un axe vertical passant par son extrémité A. La tige porte un petit manchon de masse m lié par un ressort de

masse négligeable et de longueur l_0 avec l'extrémité A. La raideur du ressort est k. Quel travail faut-il fournir pour faire tourner lentement ce système à la vitesse angulaire ω?

1.129. Sur une poulie fixée au plafond d'un laboratoire passe un fil portant à ses extrémités les masses m_1 et m_2. En négligeant les masses de la poulie et du fil ainsi que le frottement, calculer l'accélération w_C du centre d'inertie de ce système.

1.130. Deux particules en interaction forment un système fermé dont le centre d'inertie est au repos. La fig. 34 montre la position des deux particules à un certain moment et la trajectoire de la particule de masse m_1. Construire la trajectoire de la particule de masse m_2 si $m_2 = m_1/2$.

m_2 m_1

Fig. 34

1.131. Une chaînette fermée A de masse $m = 0,36$ kg est reliée par un fil à l'extrémité de l'axe vertical d'une centrifugeuse (fig. 35) et tourne à la vitesse angulaire constante $\omega = 35$ rd/s. Le fil fait un angle $\vartheta = 45°$ avec la verticale. Déterminer la distance du centre d'inertie de la chaînette à l'axe de rotation et la tension du fil.

1.132. Un cône circulaire A de masse $m = 3,2$ kg et de demi-angle au sommet $\alpha = 10°$ roule uniformément, sans glisser, sur

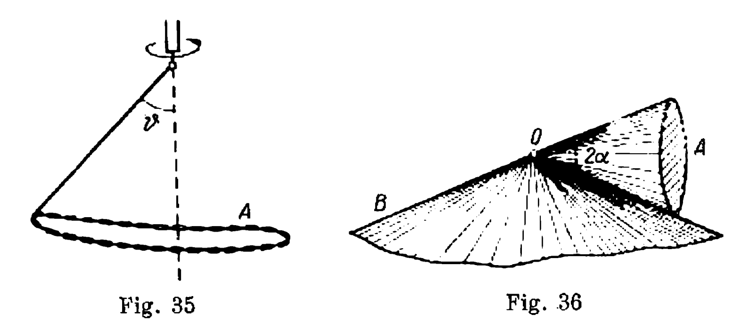


Fig. 35 Fig. 36

une surface conique B de telle manière que son sommet est immobile (fig. 36). Le centre de gravité du cône A se trouve au même niveau que le point O, en est distant de $l = 17$ cm et se déplace suivant une circonférence à la vitesse angulaire ω. Déterminer:

a) la force de frottement statique appliquée au cône A lorsque $\omega = 1,0$ rd/s;

b) les valeurs de ω pour lesquelles le mouvement du cône A se produira sans glissement, le coefficient de frottement entre les surfaces étant $k = 0,25$?

1.133. Deux particules se déplacent dans un référentiel K suivant l'axe des x: l'une, de masse m_1, à la vitesse v_1, l'autre, de masse m_2, à la vitesse v_2. Calculer:

a) la vitesse V du référentiel K' dans lequel l'énergie cinétique totale des deux particules est minimale;

b) l'énergie cinétique totale de ces particules dans le référentiel K'.

1.134. Le centre d'inertie d'un système de particules est au repos dans un référentiel animé d'une translation à la vitesse **V** par rapport au référentiel galiléen K. La masse du système de particules est m, son énergie totale dans le référentiel du centre d'inertie est $\tilde{E}$. Déterminer l'énergie totale E de ce système de particules dans le référentiel K.

1.135. Deux petites rondelles de masses m_1 et m_2 reliées par un ressort de masse négligeable reposent sur un plan horizontal lisse. On leur communique les vitesses initiales $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ telles que les deux vecteurs sont orthogonaux et se trouvent dans le plan horizontal. Calculer l'énergie totale de ce système dans le référentiel du centre d'inertie.

1.136. Un système se compose de deux billes de masses m_1 et m_2 reliées par un ressort sans poids. Au moment $t = 0$ les billes reçoivent des vitesses initiales $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ et le système se met à évoluer dans le champ de l'attraction terrestre. En négligeant la résistance de l'air, déterminer, en fonction du temps, l'impulsion résultante du système lors du mouvement et le rayon vecteur du centre d'inertie par rapport à sa position initiale.

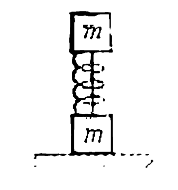


Fig. 37

1.137. Un système est constitué par deux cubes identiques, de masse m chacun, liés par un fil de sorte qu'un ressort de masse négligeable et de raideur k se trouve comprimé entre eux (fig. 37). A un certain moment on brûle le fil. Déterminer:

a) pour quelle valeur de raccourcissement initial du ressort Δl le cube inférieur s'élèvera-t-il une fois le fil brûlé;

b) à quelle hauteur h montera le centre d'inertie de ce système si le raccourcissement initial $\Delta l = 7\ mg/k$?

1.138. Deux chariots identiques, *1* et *2*, portant chacun un opérateur se déplacent, sans frottement, l'un à la rencontre de l'autre sur des rails parallèles. Au moment de leur rencontre les opérateurs changent de chariot en sautant dans la direction perpendiculaire à celle du mouvement. Le chariot *1* s'arrête alors, tandis que celui *2* poursuit le mouvement dans le même sens, sa vitesse devenue **v**. Déterminer les vitesses initiales des chariots si la masse de chaque chariot (non chargé) est M, celle de chaque opérateur étant m.

1.139. Deux chariots identiques se déplacent (sans frottement), l'un après l'autre, sous l'effet de l'inertie à la même vitesse $\mathbf{v}_0$. Sur le chariot arrière se trouve un opérateur de masse m. A un certain moment, l'opérateur saute sur le chariot avant à la vitesse **u** par rapport à son chariot. La masse de chaque chariot étant M, déterminer les vitesses des deux chariots après le saut.

1.140. Deux opérateurs, de masse m chacun, sont debout au bord d'un chariot immobile de masse M. En négligeant le frottement, déterminer la vitesse qu'acquerra le chariot si les deux hommes en sautent à la même vitesse horizontale **u** par rapport au chariot: 1) simultanément 2) l'un après l'autre. Dans quel cas la vitesse du chariot sera-t-elle plus grande et de combien de fois?

1.141. Une chaînette longue de $l = 1{,}40$ m de masse $m = 1{,}00$ kg est suspendue à un fil de façon que son extrémité inférieure touche la surface d'une table. Le fil brûlé, la chaînette tombe sur la table. Quelle impulsion totale a-t-elle transmis à la table?

1.142. Une bille d'acier de masse $m = 50$ g tombe d'une hauteur $h = 1{,}0$ m sur la surface horizontale d'une pièce massive. Déterminer l'impulsion totale que la bille transmet à la pièce à la suite de nombreux rebondissements si chaque choc produit une variation de la vitesse de la bille de $\eta = 0{,}80$ fois.

1.143. Un radeau de masse M avec un opérateur de masse m à son bord est immobile sur un étang. L'opérateur se déplace de $\mathbf{l}'$ à la vitesse $\mathbf{v}'(t)$ par rapport au radeau et s'arrête. En négligeant la résistance de l'eau, déterminer:

a) le déplacement du radeau $\mathbf{l}$ par rapport à la rive;

b) la composante horizontale de la force agissant lors du mouvement sur le radeau de la part de l'opérateur.

1.144. Sur la gorge d'une poulie fixe passe une corde supportant à une extrémité une échelle avec un opérateur et à l'autre une masse contrebalançante M. L'homme de masse m s'est déplacé en haut de $\mathbf{l}'$ par rapport à l'échelle et s'est arrêté. En négligeant les masses de la poulie et de la corde ainsi que le frottement dans l'axe de la poulie, calculer le déplacement $\mathbf{l}$ du centre d'inertie de ce système.

1.145. Un canon de masse M glisse sans vitesse initiale vers le bas sur un plan incliné lisse faisant un angle α avec l'horizontale. Après avoir parcouru la distance l le canon tire, en lançant un obus d'impulsion **p** dans le sens horizontal et s'arrête. En négligeant la masse de l'obus devant celle du canon, calculer la durée du tir.

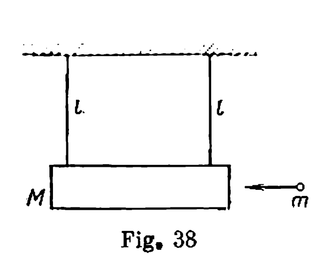


Fig. 38

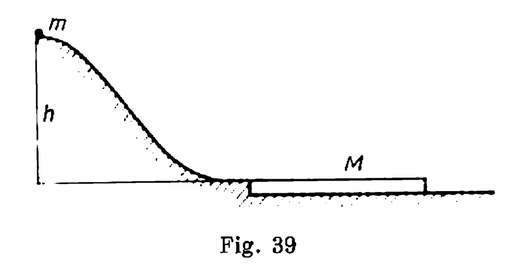


Fig. 39

1.146. Une balle de masse m volant horizontalement atteint un corps de masse M suspendu à deux fils identiques de longueur l (fig. 38), et s'y enfonce. Les fils s'écartent alors d'un angle ϑ. En posant $m \ll M$, calculer:

a) la vitesse de la balle avant qu'elle atteigne le corps;

b) la partie relative de l'énergie cinétique initiale de la balle transformée en chaleur.

1.147. Une petite rondelle de masse m glisse sans vitesse initiale sur un monticule de hauteur h pour atteindre une planche de masse M posée sur un plan horizontal lisse au pied du monticule (fig. 39). A cause du frottement entre la planche et la rondelle celle-ci freine et, à partir d'un certain moment, elles se déplacent ensemble.

1) Calculer le travail total des forces de frottement lors de ce mouvement.

2) Peut-on affirmer que le résultat obtenu ne dépend pas du système de référence?

1.148. On laisse tomber une pierre d'une hauteur h. En l'absence de la résistance de l'air la pierre acquiert, à la fin de la chute, une vitesse $v_0 = \sqrt{2gh}$. Obtenir la même formule en résolvant le problème dans le système de référence « tombant » à la vitesse constante v_0.

1.149. Une particule de masse 1,0 g animée d'une vitesse $\mathbf{v}_1 = 3{,}0\mathbf{i} - 2{,}0\mathbf{j}$ m/s, entre en choc parfaitement mou avec une autre particule de masse 2,0 g ayant une vitesse $\mathbf{v}_2 = 4{,}0\mathbf{j} - 6{,}0\mathbf{k}$ m/s. Calculer la vitesse de la particule formée: le vecteur $\mathbf{v}$ et son module.

1.150. Calculer l'accroissement de l'énergie cinétique d'un système fermé de deux billes de masses m_1 et m_2 lorsqu'elles entrent en choc parfaitement mou, les vitesses des billes avant le choc étant $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$.

1.151. Une particule de masse m_1 entre en choc parfaitement élastique avec une particule de masse m_2, initialement au repos. Quelle partie relative de l'énergie cinétique a perdu la particule si:

a) elle rebondit sous un angle droit par rapport à la direction initiale de son mouvement;

b) le choc est central?

1.152. Une particule *1* heurte en choc parfaitement élastique une particule *2* qui est au repos. Déterminer le rapport de leurs masses si:

a) le choc est central et les particules prennent les directions opposées avec les vitesses égales;

b) les directions des particules après le choc font un angle $\theta = 60°$ et sont symétriques par rapport à la direction initiale de la particule *1*.

1.153. Une particule *1* animée d'une vitesse $v = 10$ m/s heurte, en choc central, une particule *2* immobile, de même masse. A la suite du choc l'énergie cinétique du système a diminué de $\eta = 1{,}0$ %. Déterminer la grandeur et le sens de la vitesse de la particule *1* après le choc.

1.154. A la suite du choc, une particule de masse m a dévié d'un angle $\pi/2$ tandis qu'une autre particule, de masse M, initialement au repos, a rebondi sous un angle $\vartheta = 30°$ par rapport à la direction initiale de la particule m. Calculer comment a changé

l'énergie cinétique du système après le choc et de combien de p. cent si $M/m = 5{,}0$?

1.155. Un système isolé se compose de deux particules de masses m_1 et m_2 qui se rapprochent l'une de l'autre suivant les directions perpendiculaires à des vitesses v_1 et v_2. Déterminer, dans le système de référence du centre d'inertie:

a) l'impulsion de chaque particule;

b) l'énergie cinétique totale des deux particules.

1.156. Une particule de masse m_1 éprouve un choc parfaitement élastique contre une particule immobile de masse m_2, $m_1 > m_2$. Déterminer l'angle maximal dont pourrait dévier la particule incidente à la suite du choc.

1.157. Trois rondelles identiques A, B et C reposent sur un plan horizontal lisse (fig. 40). On communique à la rondelle A une vitesse **v** et elle entre en collision simultanément avec les rondelles

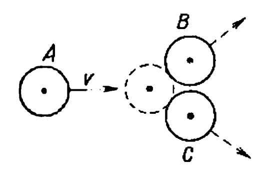


Fig. 40

B et C. La distance entre les centres de ces dernières avant le choc était η fois supérieure au diamètre de chaque rondelle. Etant donné que le choc est parfaitement élastique, déterminer la vitesse de la rondelle A après le choc. Pour quelle valeur de η la rondelle A rebondit, s'arrête ou s'avance après le choc?

1.158. Une molécule en rencontre une autre, immobile, de même masse. Démontrer que l'angle entre les directions que suivent les molécules après le choc:

a) est égal à 90° si le choc est parfaitement élastique;

b) diffère de 90° si le choc est mou.

1.159. Une fusée éjecte un jet continu de gaz avec la vitesse **u** par rapport à la fusée. Le débit de gaz est μ kg/s. Montrer que l'équation du mouvement de la fusée est

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} - \mu\mathbf{u},$$

où m est la masse de la fusée à la date actuelle, **w**, son accélération, **F**, la force extérieure (force de la pesanteur et résistance de l'air).

1.160. Une fusée se déplace en l'absence des forces extérieures en éjectant un jet continue de gaz avec la vitesse **u**, constante par rapport à la fusée. Déterminer la vitesse de la fusée **v** à l'instant où sa masse est m si à l'instant initial elle avait la masse m_0 et la vitesse nulle. Se servir de la formule du problème précédent.

1.161. Etablir la loi de la variation de masse d'une fusée en fonction du temps si elle se déplace avec l'accélération constante w

en l'absence des forces extérieures, la vitesse d'écoulement du gaz par rapport à la fusée u étant constante, sa masse à l'instant initial étant m_0.

1.162. Un vaisseau spatial de masse m_0 se déplace avec la vitesse constante $\mathbf{v}_0$ en l'absence des forces extérieures. Pour modifier la direction du mouvement, on fait actionner un moteur à réaction qui éjecte un jet de gaz avec la vitesse $\mathbf{u}$ constante par rapport au vaisseau et constamment perpendiculaire à la direction du mouvement. A la fin du fonctionnement du moteur la masse du vaisseau devient m. De quel angle α dévie la direction du vaisseau après le fonctionnement du moteur?

1.163. Un chariot chargé de sable est sollicité le long du plan horizontal, par une force constante $\mathbf{F}$ coïncidant en direction avec son vecteur vitesse. Par un orifice pratiqué dans le fond le sable s'écoule au débit constant μ kg/s. Déterminer l'accélération et la vitesse du chariot à l'instant t si à l'instant $t = 0$ la masse du chariot était m_0 et sa vitesse nulle. On néglige le frottement.

1.164. Une plate-forme A de masse m_0 se met à se déplacer vers la droite (fig. 41) tirée par une force constante $\mathbf{F}$. D'une trémie immo-

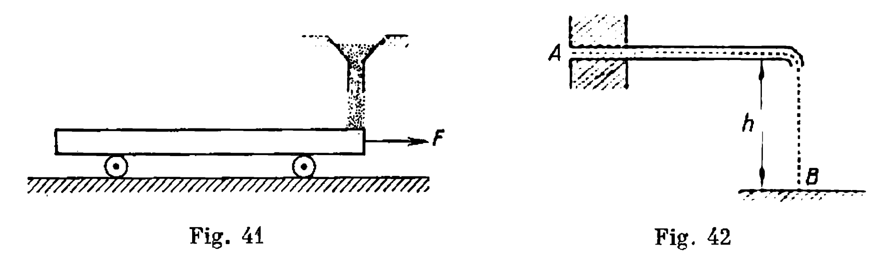


Fig. 41 Fig. 42

bile du sable se déverse sur la plate-forme. La vitesse constante de chargement est égale à μ kg/s. Déterminer, en fonction du temps, la vitesse et l'accélération de la plate-forme au cours du chargement.

1.165. Une chaînette AB de longueur l se trouve à l'intérieur d'un tube lisse horizontal de telle manière qu'une partie longue de h en pend et effleure par son extrémité B la surface de la table (fig. 42). A un certain moment on lâche l'extrémité A de la chaînette. A quelle vitesse cette extrémité quitte le tube?

1.166. Le moment cinétique d'une particule par rapport à un certain point O varie en fonction du temps selon la loi $\mathbf{M} = \mathbf{a} + \mathbf{b}t^2$ où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des vecteurs constants tels que $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. Déterminer par rapport au point O le moment $\mathbf{N}$ de la force agissant sur la particule lorsque le vecteur $\mathbf{N}$ fera un angle de 45° avec $\mathbf{M}$.

1.167. Une bille de masse m est lancée sous un angle α à l'horizontale avec la vitesse initiale v_0. Déterminer, en fonction du temps du mouvement, le module M du moment cinétique de la bille par rapport au point du lancement. Calculer M au sommet de la trajectoire si $m = 130$ g, $\alpha = 45°$ et $v_0 = 25$ m/s. On néglige la résistance de l'air.

1.168. Une rondelle A de masse m en glissant sur un plan horizontal lisse à la vitesse v vient éprouver, en un point O (fig. 43), un choc parfaitement élastique contre une paroi lisse immobile. La direction du mouvement de la rondelle fait un angle α avec la normale à la paroi. Déterminer:

a) les points par rapport auxquels le moment cinétique **M** de la rondelle demeure constant au cours de ce processus;

b) le module de l'accroissement du moment cinétique de la rondelle par rapport au point O' situé dans le plan du mouvement de la rondelle à la distance l du point O.

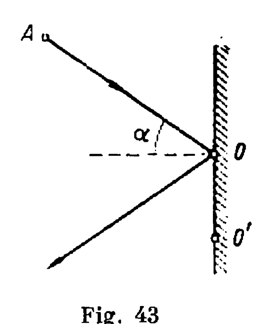


Fig. 43

1.169. Une petite bille de masse m attachée au plafond en un point O par un fil de longueur l, décrit une circonférence horizontale à la vitesse angulaire constante ω. Déterminer des points par rapport auxquels le moment cinétique **M** de la bille ne varie pas. Calculer le module de l'accroissement de moment cinétique de la bille par rapport au point O au bout d'un demi-tour.

1.170. Une bille de masse m est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur h. Calculer le module de l'accroissement, pendant la chute, de son moment cinétique par rapport au point O d'un système de référence animé d'une translation horizontale avec une vitesse V. A l'instant initial le point O coïncidait avec la bille. La résistance de l'air est supposée nulle.

1.171. Un disque lisse horizontal est animé d'une rotation avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical passant par son centre, point O. A l'instant $t = 0$, une rondelle part de ce point avec une vitesse v_0. Déterminer le moment cinétique de la rondelle $M(t)$ par rapport au point O dans un système de référence lié au disque. Se convaincre que ce moment cinétique est occasionné par la force de Coriolis.

1.172. Une particule évolue sur une trajectoire fermée dans un champ de force central. Son énergie potentiel y est $U = kr^2$ où k est une constante positive, r, la distance de la particule au centre du champ O. Déterminer la masse de la particule si sa distance minimale au point O est égale à r_1 tandis que sa vitesse à la distance maximale du même point est v_2.

1.173. Une petite bille est suspendue à un point fixe O par un fil sans masse de longueur l. On écarte ensuite la bille de façon à former un angle ϑ entre le fil et la verticale et on lui communique une vitesse horizontale perpendiculairement au plan vertical passant par le fil. Quelle vitesse doit-on communiquer à la bille pour que l'angle maximale dont le fil s'écarte de la verticale soit de $\pi/2$?

1.174. Sur un plan horizontal lisse se meut un petit corps de masse m attaché à un fil inextensible dont l'autre extremité est tirée

par l'orifice O (fig. 44) avec la vitesse constante u. Déterminer la tension du fil en fonction de la distance r entre le corps et l'orifice si pour $r = r_0$ la vitesse angulaire du fil était ω_0.

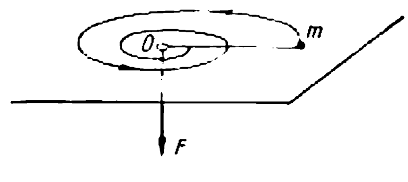


Fig. 44

1.175. Un fil léger inextensible enroulé sur la gorge d'une poulie fixe massive de rayon R porte à l'extrémité libre un petit corps de masse m. A l'instant $t = 0$, le système abandonné à lui-même se met en mouvement. Déterminer, en fonction de t, son moment cinétique par rapport à l'axe de la poulie.

1.176. Une sphère homogène de masse m et de rayon R roule sans glisser sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. La vitesse initiale de la sphère étant nulle, déterminer, en fonction du temps, son moment cinétique par rapport au point de contact à l'instant initial. Comment sera modifié le résultat dans le cas d'un plan incliné parfaitement lisse?

1.177. Un certain système de particules possède une impulsion totale $\mathbf{p}$ et un moment cinétique $\mathbf{M}$ par rapport au point O. Trouver son moment cinétique $\mathbf{M}'$ par rapport au point O' dont la position par rapport au point O est déterminée par le rayon vecteur $\mathbf{r}_0$. Montrer dans quel cas le moment cinétique du système de particules sera indépendant du choix du point O.

1.178. Démontrer que le moment cinétique $\mathbf{M}$ d'un système de particules par rapport au point O d'un référentiel K peut être donné par

$$\mathbf{M} = \widetilde{\mathbf{M}} + [\mathbf{r}_C \mathbf{p}],$$

où $\widetilde{\mathbf{M}}$ est son moment cinétique propre (dans un référentiel du centre d'inertie en translation), $\mathbf{r}_C$ le rayon vecteur du centre d'inertie par rapport au point O, $\mathbf{p}$ l'impulsion résultante du système de particules dans le référentiel K.

1.179. Une bille de masse m animée d'une vitesse v_0 a subi un choc élastique central contre une des sphères d'un haltère rigide, initialement au repos, comme le montre la fig. 45. La masse de chaque sphère de l'haltère est $m/2$, leur distance l. En négligeant les dimensions des sphères, déterminer le moment cinétique propre $\widetilde{\mathbf{M}}$ de l'haltère après le choc, i.e. le moment cinétique dans un référentiel animé d'une translation et lié au centre d'inertie de l'haltère.

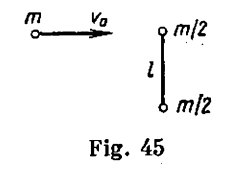


Fig. 45

1.180. Deux petites rondelles identiques, de masse m chacune, reposent sur un plan horizontal lisse. Les rondelles sont reliées par un ressort léger non déformé dont la longueur est l et la raideur k. A un certain moment, une des rondelles reçoit une vitesse v_0 dans une direction horizontale, perpendiculaire au ressort. Calculer l'élongation relative maximale du ressort au cours du mouvement si l'on sait qu'elle est sensiblement inférieure à l'unité.

Mécanique relativiste

1.181. Une tige se déplace dans la direction longitudinale avec une vitesse constante v par rapport à un référentiel galiléen K. Pour quelle valeur de v la longueur de la tige dans ce référentiel sera de $\eta = 0{,}5$ % inférieure à sa longueur propre?

1.182. Un triangle rectangle isocèle d'aire S est au repos dans le référentiel K. Déterminer l'aire de ce triangle ainsi que ses angles dans un référentiel K' animé d'une vitesse $^4/_5\ c$ par rapport au référentiel K dans la direction parallèle à l'hypoténuse du triangle.

1.183. Déterminer la longueur propre d'une tige si, dans un système de référence du laboratoire sa vitesse est $v = c/2$, sa longueur $l = 1{,}00$ m et elle fait un angle $\vartheta = 45°$ avec la direction du mouvement.

1.184. Une tige longe une règle avec une certaine vitesse constante. En fixant simultanément les positions des deux extrémités de cette tige dans un référentiel lié à la règle, on obtient la différence des lectures sur la règle $\Delta x_1 = 4{,}0$ m. En fixant simultanément les positions des deux extrémités dans un référentiel lié à la tige, on obtiendrait la différence des lectures sur la même règle $\Delta x_2 = 9{,}0$ m. Déterminer la longueur propre de la tige ainsi que sa vitesse par rapport à la règle.

1.185. La durée de vie propre d'une certaine particule instable est $\tau_0 = 10$ ns. Calculer la distance qu'aura parcourue cette particule avant la désintégration dans un système de référence du laboratoire où sa durée de vie est $\tau = 20$ ns.

1.186. Un méson μ se déplaçant dans un référentiel K avec la vitesse $v = 0{,}990\ c$ a parcouru, depuis sa naissance jusqu'à la désintégration, une distance $l = 3{,}0$ km. Calculer:

a) la durée de vie propre de ce méson;

b) la distance qu'a parcourue le méson de « son propre point de vue ».

1.187. Deux particules se mouvant, dans un système de référence du laboratoire, suivant une même droite avec la même vitesse $v = {}^3/_4\ c$ atteignent une cible immobile avec l'intervalle de temps $\tau = 50$ ns. Déterminer la distance propre des deux particules avant qu'elles n'atteignent la cible.

1.188. Deux événements, séparés par un intervalle de temps Δt, se sont produits dans deux points d'un référentiel K. Montrer, que si ces événements sont liés par causalité dans le référentiel K (par

exemple, le coup de feu et l'atteinte de la cible), ils le seront dans tout autre référentiel galiléen K'.

1.189. Dans un référentiel K deux particules se meuvent suivant une certaine droite dans le même sens avec la vitesse $v = 0{,}990\ c$. Leur distance propre est $l = 120$ m. Supposons qu'elles se désintègrent simultanément dans un référentiel lié à elles. Quel intervalle de temps séparant les moments de désintégration sera enregistré dans le référentiel K? Laquelle des deux particules se désintégrera-t-elle plus tard dans le référentiel K?

1.190. Deux tiges de même longueur propre l_0 se déplacent parallèlement à un axe commun l'une à la rencontre de l'autre. Dans un référentiel lié à l'une des tiges l'intervalle de temps séparant la coïncidence des extrémités droites et gauches des tiges s'est trouvé égal à Δt. Quelle est la vitesse d'une tige dans le référentiel lié à l'autre tige?

1.191. Deux tiges de même longueur propre l_0 se rapprochent l'une de l'autre parallèlement à l'axe des x commun avec une vitesse

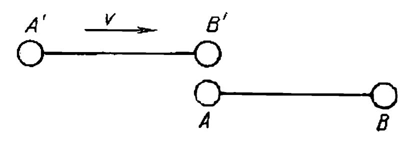


Fig. 46

relative v. Les deux extrémités de chaque tige sont munies d'horloges synchronisées entre elles: A avec B et A' avec B' (fig. 46). On prend pour origine des temps dans des référentiels liés à chacune des tiges l'instant où l'horloge B' est au niveau de l'horloge A. Déterminer:

a) l'indication des horloges B et B' au moment où elles se trouvent l'une en face de l'autre;

b) idem pour les horloges A et A'.

1.192. Deux groupes d'horloges synchronès K et K' se déplacent dans un mouvement relatif avec la vitesse v comme l'indique la

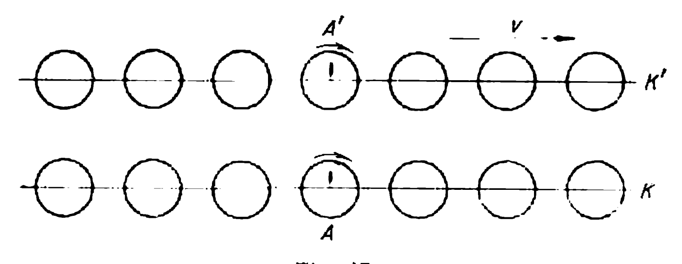


Fig. 47

fig. 47. On prend pour origine des temps l'instant où l'horloge A' se trouve en face de l'horloge A. Figurer la disposition des aiguilles de toutes les horloges à cette date « du point de vue » des horloges: du groupe K? du groupe K'?

1.193. Un référentiel K' se déplace dans le sens positif de l'axe des x d'un référentiel K avec la vitesse v, les axes x et x' étant confondus. Supposons qu'au moment où les origines des coordonnées O et O' coïncident, les indications des horloges des deux référentiels y soient nulles. Déterminer, dans le référentiel K, la vitesse du déplacement d'un point tel que les indications des horloges des deux référentiels y soient toujours les mêmes.

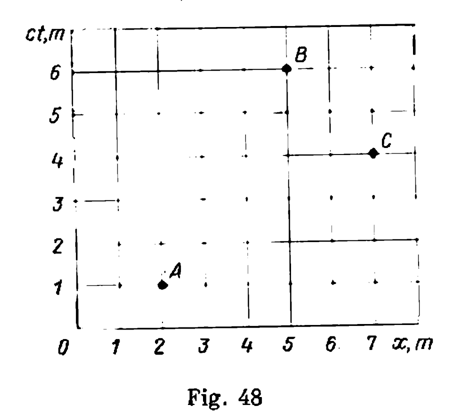


Fig. 48

1.194. Se convaincre que l'intervalle Δs est un invariant, c'est-à-dire qu'il reste le même lors du passage d'un référentiel galiléen à un autre.

1.195. Trois événements A, B et C qui ont eu lieu dans un certain référentiel galiléen sont représentés sur le diagramme espace-temps (fig. 48). En se servant de l'invariance de l'intervalle, calculer:

a) l'intervalle de temps propre entre les événements A et B;

b) la distance propre des événements A et C.

1.196. Une tige fine AB, d'une longueur propre l_0 est immobile dans un référentiel K', et fait un angle ϑ' avec l'axe des x' (fig. 49). Le référentiel K' est animé d'une vitesse relativiste **v** le long d'une plaque photographique MN, immobile dans un référentiel K. A l'instant où la tige passe à côté de la plaque on déclenche une flash de sorte que le front d'onde lumineuse se trouve parallèle au plan de la plaque. Déterminer:

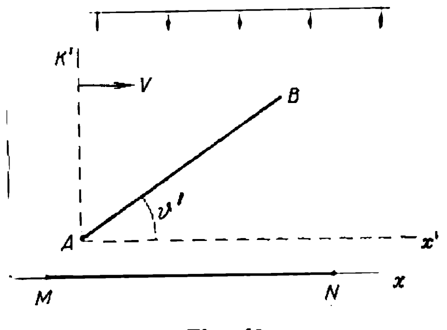


Fig. 49

a) la longueur de l'image de la tige sur la plaque photographique;

b) la valeur de l'angle ϑ' pour laquelle la longueur de l'image sera: nulle; maximale.

1.197. Dans le plan xy d'un référentiel K évolue une particule dont les projections de la vitesse sont v_x et v_y. Déterminer la vitesse v' de cette particule dans un référentiel K' qui se déplace avec la vitesse v relativement au référentiel K dans le sens positif de l'axe des x de celui-ci.

1.198. Deux particules se rapprochent l'une de l'autre avec les vitesses $v_1 = 0{,}50c$ et $v_2 = 0{,}75c$ dans un système de référence du laboratoire. Calculer leur vitesse relative:

a) dans ce système de référence;

b) dans un référentiel lié à l'une des particules.

1.199. Deux tiges de même longueur propre l_0 vont l'une à la rencontre de l'autre, dans un déplacement longitudinal parallèlement à un axe commun avec la même vitesse v par rapport au système de référence du laboratoire. Quelle est la longueur de chaque tige dans un référentiel lié à l'autre?

1.200. Deux particules relativistes se déplacent suivant les directions orthogonales dans un référentiel du laboratoire, l'une à la vitesse v_1, l'autre à la vitesse v_2. Déterminer leur vitesse relative:

a) dans ce référentiel;

b) dans un référentiel lié à l'une des particules.

1.201. Une ampoule décrit, dans un référentiel K', l'axe des y' avec la vitesse v'. A son tour, le référentiel K' est animé d'un mouvement avec la vitesse v par rapport au référentiel K dans le sens positif de l'axe x de ce dernier. Les axes x' et x des deux référentiels coïncident, les axes y' et y sont parallèles. Déterminer la distance que parcourra l'ampoule allumée si son temps propre d'incandescence est τ_0.

1.202. Une particule se déplace dans un référentiel K avec une vitesse v faisant un angle ϑ avec l'axe x. Calculer l'angle correspondant dans le référentiel K' se déplaçant avec la vitesse v par rapport au référentiel K dans le sens positif de l'axe x si les axes x et x' des deux référentiels se confondent.

1.203. Une tige AB orientée parallèlement à l'axe des x' d'un référentiel K' s'y déplace avec la vitesse v' le long de son axe y'.

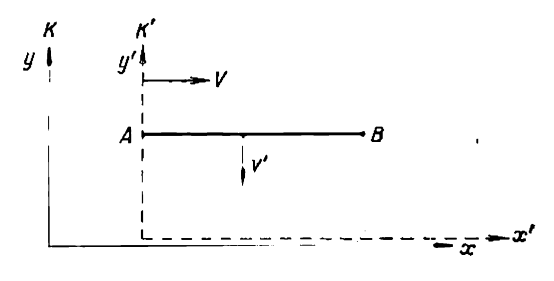


Fig. 50

Le référentiel K', à son tour, se déplace avec la vitesse v par rapport au référentiel K, comme l'indique la fig. 50. Trouver l'angle ϑ que fait la tige avec l'axe x dans le référentiel K?

1.204. Un référentiel K' se déplace avec une vitesse constante **V** par rapport à un référentiel K. Calculer l'accélération w' d'une particule dans le référentiel K' si elle est animée, dans le référentiel K, d'une vitesse v et d'une accélération w suivant une droite:

a) dans le sens du vecteur **V**;

b) perpendiculaire au vecteur **V**.

1.205. Un engin spatial imaginaire part de la Terre avec une accélération $w' = 10$ g, la même dans tout référentiel galiléen instantanément lié à l'engin. L'accélération a duré, selon l'horloge terrestre, $\tau = 1{,}0$ an. Calculer de combien de p. cent diffère la vitesse de l'engin de celle de la lumière à la fin de l'accélération. Le chemin parcouru par la fusée vers ce moment?

1.206. En se servant des données du problème précédent déterminer le temps τ_0 mis pour accélérer l'engin dans un référentiel lié à lui-même. A titre d'information, ce temps est donné par la formule

$$\tau_0 = \int_0^{\tau} \sqrt{1-(v/c)^2}\, dt,$$

où dt est l'intervalle de temps dans le référentiel terrestre.

1.207. Combien de fois la masse relativiste d'une particule animée d'une vitesse différant de celle de la lumière de 0,010 % est-elle plus grande que sa masse au repos?

1.208. La densité d'un corps au repos est ρ_0. Déterminer la vitesse d'un référentiel par rapport au corps donné telle que sa densité y soit de $\eta = 10$ % plus grande que ρ_0.

1.209. De combien de p. cent la vitesse d'un proton avec l'impulsion $p = 10$ GeV/s diffère-t-elle de la vitesse de la lumière?

1.210. Déterminer la vitesse pour laquelle l'impulsion relativiste d'une particule est $\eta = 2$ fois plus grande que son impulsion newtonienne.

1.211. Quel travail doit-on fournir pour augmenter la vitesse d'une particule de masse au repos m_0 de $0{,}60c$ à $0{,}80\,c$? Comparer le résultat obtenu avec celui donné par la formule de la mécanique classique.

1.212. A quelle vitesse l'énergie cinétique d'une particule est-elle égale à son énergie au repos?

1.213. Pour quelles valeurs du rapport de l'énergie cinétique d'une particule à son énergie au repos l'erreur relative ne dépassera-t-elle $\varepsilon = 0{,}010$ si l'on calcule la vitesse d'après la formule classique?

1.214. Déterminer, en fonction de l'énergie cinétique, l'impulsion d'une particule de masse au repos m_0. Calculer l'impulsion d'un proton à l'énergie cinétique 500 MeV.

1.215. Un faisceau de particules relativistes à l'énergie cinétique T attaque une cible absorbante. L'intensité du courant en faisceau est I, la charge et la masse au repos de chaque particule sont respectivement e et m_0. Pression exercée par le faisceau sur la cible et puissance qui s'y dégage?

1.216. Une sphère animée d'une vitesse relativiste v se meut dans un gaz qui renferme, par unité de volume, n particules en mouvement lent, de masse m chacune. Calculer la pression p exercée par le gaz sur un élément de surface de la sphère normal à sa vitesse, les particules rebondissant de façon élastique. Se convaincre que la

pression est la même tant dans le référentiel lié à la sphère que dans le référentiel lié au gaz.

1.217. A l'instant $t = 0$, une particule de masse au repos m_0 part sous l'action d'une force constante **F**. Déterminer, en fonction du temps t, la vitesse de la particule et la distance qu'elle parcourt.

1.218. Une particule de masse au repos m_0 suit l'axe des x d'un référentiel K conformément à la loi $x = \sqrt{a^2 + c^2t^2}$ où a est une certaine constante, c, la vitesse de la lumière, t le temps. Déterminer la force s'exerçant sur la particule dans ce référentiel.

1.219. Un électron se met à évoluer dans un champ électrique d'intensité $E = 10$ kV/cm. Dans combien de temps à partir du commencement du mouvement l'énergie cinétique de l'électron égalera-t-elle son énergie au repos?

1.220. Calculer l'accélération d'un électron relativiste longeant un champ électrique uniforme d'intensité E à l'instant où son énergie cinétique est T.

1.221. En partant de l'équation fondamentale de la dynamique relativiste, déterminer:

a) dans quels cas l'accélération d'une particule et la force **F** qui lui est appliquée coïncident en direction;

b) les coefficients de proportionnalité entre la force **F** et l'accélération **w** lorsque $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$ et $\mathbf{F} \parallel \mathbf{v}$ où **v** est la vitesse de la particule.

1.222. A l'instant $t = 0$, un proton relativiste animé d'une vitesse $\mathbf{v}_0$ entre dans une région, siège d'un champ électrique uniforme transversal d'intensité **E** et tel que $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{E}$. Déterminer en fonction du temps t:

a) l'angle ϑ que fait le vecteur vitesse **v** du proton avec la direction initiale de son mouvement;

b) la projection v_x du vecteur **v** sur la direction initiale du mouvement.

1.223. Une particule relativiste chargée, de masse au repos m_0 et de charge e, décrit un cercle de rayon ρ dans un champ magnétique uniforme d'induction B. Vitesse et accélération de la particule?

1.224. Une particule relativiste d'impulsion **p** et d'énergie totale E longe l'axe des x d'un référentiel K. Montrer que dans un référentiel K' animé d'une vitesse constante v par rapport au référentiel K dans le sens positif de l'axe des x de ce dernier, l'impulsion et l'énergie totale de la particule donnée sont déterminées par les formules:

$$p'_x = (p_x - EV/c^2)/\sqrt{1-\beta^2}, \quad E' = (E - p_xV)/\sqrt{1-\beta^2},$$

où $\beta = V/c$.

1.225. Dans un référentiel K l'énergie d'un photon est égale à ε. En se servant des formules de transformation du problème précédent, déterminer l'énergie ε' de ce photon dans un référentiel K' animé d'une vitesse v par rapport au référentiel K dans le sens du déplacement du photon. Pour quelle valeur de V l'énergie du photon $\varepsilon' = \varepsilon/2$?

1.226. Montrer que pour une particule la quantité $E^2 - p^2c^2$ est un invariant, c'est-à-dire reste la même dans tous les référentiels galiléens. Quelle est la valeur de cet invariant?

1.227. Un neutron ayant une énergie cinétique $T = 2m_0c^2$, où m_0 est sa masse au repos, en rencontre un autre, immobile. Déterminer:

a) l'énergie cinétique totale $\widetilde{T}$ de deux neutrons dans le référentiel de leur centre d'inertie et l'impulsion $\widetilde{p}$ de chaque neutron dans ce référentiel;

b) la vitesse du centre d'inertie de ce système de particules.

R e m a r q u e. Se servir de l'invariance de la quantité $E^2 - p^2c^2$ lors du passage d'un référentiel galiléen à un autre (ici E est l'énergie totale du système, p son impulsion totale).

1.228. Une particule de masse au repos m_0 et d'énergie cinétique T rencontre une particule immobile, de même masse au repos. Déterminer la masse au repos et la vitesse de la particule composée, formée à la suite de la collision.

1.229. Quelle énergie cinétique doit posséder un proton entrant en collision avec un autre, immobile, pour que leur énergie cinétique totale dans le référentiel de leur centre d'inertie soit la même que celle de deux protons allant l'un à la rencontre de l'autre et ayant les énergies cinétiques $T = 25{,}0$ GeV?

1.230. Une particule immobile, de masse au repos m_0 se désintègre en trois particules de masses au repos m_1, m_2 et m_3. Calculer l'énergie totale maximale que puisse avoir, par exemple, la particule m_1.

1.231. Une fusée relativiste éjecte des gaz avec une vitesse non relativiste $\mathbf{u}$, constante par rapport à l'engin. Déterminer, en fonction de sa masse au repos m, la vitesse v de la fusée si à l'instant zéro sa masse au repos est m_0.

Attraction universelle

1.232. Une certaine planète décrit une circonférence autour du Soleil à la vitesse $v = 34{,}9$ km/s (par rapport au système de référence héliocentrique). Calculer la période de révolution de cette planète.

1.233. La période de révolution du Jupiter autour du Soleil est 12 fois plus grande que celle de la Terre. En supposant circulaires les orbites des planètes, déterminer:

a) combien de fois la distance du Jupiter au Soleil est supérieure à celle de la Terre au Soleil;

b) la vitesse et l'accélération du Jupiter dans le référentiel héliocentrique.

1.234. Une planète évolue autour du Soleil sur une ellipse telle que la distance minimale entre la planète et le Soleil est égale à r et celle maximale à R. En s'appuyant sur les lois de Kepler calculer sa période de révolution autour du Soleil.

1.235. Un petit corps commence à tomber sur le Soleil à partir de la distance égale au rayon de l'orbite terrestre. La vitesse initiale du corps dans le référentiel héliocentrique est nulle. En appliquant les lois de Kepler calculer la durée de la chute.

1.236. Imaginons un modèle du Système solaire η fois plus petite que la grandeur nature mais en matière de la même densité moyenne que celle du Soleil et des planètes. Comment varieraient alors les périodes des modèles des planètes sur leurs orbites?

1.237. Une étoile double représente un système de deux étoiles se déplaçant, par suite de l'attraction, autour du centre d'inertie du système. Calculer la distance des composantes de l'étoile double si sa masse totale est M et la période de révolution T.

1.238. Calculer l'énergie potentielle de l'interaction attractive:

a) de deux points matériels de masses m_1 et m_2 distants de r;

b) d'un point matériel de masse m et d'une tige homogène fine de masse M et de longueur l situés sur une même droite à la distance a l'un de l'autre; déterminer également la force de leur attraction mutuelle.

1.239. Une planète de masse m évolue autour du Soleil suivant une ellipse. Ses distances minimale et maximale au Soleil sont respectivement r_1 et r_2. Calculer le moment cinétique M de cette planète par rapport au centre du Soleil.

1.240. En appliquant les lois de conservation, montrer que l'énergie mécanique totale d'une planète de masse m se déplaçant autour du Soleil suivant une ellipse ne dépend que du demi-grand axe a de cette dernière. Etablir l'expression de cette énergie.

1.241. Une planète A évolue autour du Soleil sur une orbite elliptique. A l'instant où elle se trouve à la distance r_0 du Soleil sa vitesse est v_0 et le rayon vecteur $\mathbf{r}_0$ fait un angle α avec le vecteur vitesse $\mathbf{v}_0$. Calculer les distances maximale et minimale auxquelles la planète s'éloigne du Soleil lors de son mouvement.

1.242. Un corps cosmique A s'approche du Soleil (fig. 51) ayant, au loin, la vitesse v_0 et le paramètre de visée l (bras de levier du

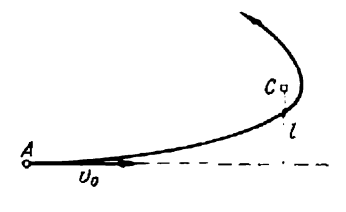


Fig. 51

vecteur $\mathbf{v}_0$ par rapport au centre du Soleil C). Déterminer la distance minimale à laquelle ce corps s'approche du Soleil.

1.243. Soit une sphère homogène de masse M et une particule de masse m située en dehors de la sphère à la distance r de son centre. Déterminer:

a) l'énergie potentielle de leur interaction de gravitation;

b) la force d'attraction exercée sur la particule par la sphère.

1.244. Démontrer que la force d'attraction agissant sur une particule A à l'intérieur d'une couche sphérique matérielle homogène est nulle.

1.245. Une particule de masse m se trouve à l'intérieur d'une sphère homogène de masse M et de rayon R à la distance r de son centre. Déterminer:

a) la force de gravitation agissant sur cette particule;

b) l'énergie potentielle de l'interaction de gravitation entre la particule et la sphère pour $r = 0$.

1.246. Une particule de masse m se trouve à la distance r du centre d'une sphère homogène de masse M et de rayon R. Etablir, en fonction de r, l'énergie potentielle U de l'interaction gravitationnelle entre la particule et la sphère pour $r > R$ et $r < R$. Tracer les graphiques approximatifs de $U(r)$ et de la force d'interaction correspondante $F(r)$.

1.247. A l'intérieur d'une sphère homogène de densité ρ est pratiquée une cavité sphérique dont le centre est à la distance **l** du celui de la sphère. Déterminer l'intensité **G** du champ de gravitation à l'intérieur de la cavité.

1.248. Une sphère homogène de rayon R a la masse M. Etablir, en fonction de la distance à son centre r, la pression p due à la compression gravitationnelle. Evaluer p au centre de la Terre en l'assimilant à une sphère homogène.

1.249. Déterminer l'énergie potentielle propre de l'interaction de gravitation entre les masses des corps suivants:

a) d'une couche sphérique mince homogène de masse m et de rayon R;

b) d'une sphère homogène de masse m et de rayon R (se servir de la réponse du problème 1.246).

1.250. Deux satellites évoluent autour de la Terre dans un même plan sur les orbites circulaires. Le rayon de l'orbite d'un satellite est $r = 7000$ km, le rayon de l'orbite de l'autre est de $\Delta r = 70$ km plus petit. Dans quel espace de temps les satellites s'approchent-ils périodiquement à la distance minimale?

1.251. Calculer le rapport des accélérations suivantes: l'accélération w_1, due à l'action de la pesanteur à la surface terrestre, l'accélération w_2 occasionnée par la force d'inertie centrifuge à l'équateur de la Terre et l'accélération w_3 communiquée aux corps terrestres par le Soleil.

1.252. A quelle altitude au-dessus du pôle de la Terre l'accélération de la pesanteur diminue de un p. cent? de deux fois?

1.253. Un corps est lancé verticalement vers le haut avec la vitesse v_0 au pôle de la Terre. Sachant le rayon de la Terre et l'accélération de la chute libre au sol, calculer l'altitude maximale atteinte par le corps. On néglige la résistance de l'air.

1.254. Un satellite artificiel mis sur une orbite circulaire autour de la Terre a une vitesse v par rapport à un référentiel animé d'une translation et lié à l'axe de la Terre. Calculer la distance du satellite à la surface terrestre. Supposer connus le rayon de la Terre et l'accélération de la pesanteur à sa surface.

1.255. Calculer le rayon de l'orbite circulaire d'un satellite stationnaire de la Terre qui demeure fixe par rapport à sa surface. Quelles sont ses vitesse et accélération dans un référentiel galiléen lié, à l'instant donné, au centre de la Terre?

1.256. Un satellite placé sur une orbite circulaire de rayon $R = 2{,}00 \cdot 10^4$ km dans un plan équatorial de la Terre se meut de l'Ouest à l'Est et apparaît tous les $\tau = 11{,}6$ h au-dessus d'un certain point équatorial. Calculer, à partir de ces données, la masse de la Terre. On suppose connue la constante de l'attraction universelle.

1.257. Un satellite mis sur une orbite circulaire de rayon $R = 10\,000$ km dans un plan équatorial terrestre se déplace de l'Est à l'Ouest. Calculer ses vitesse et accélération dans un référentiel lié à la Terre.

1.258. On veut qu'un satellite se déplace dans un plan équatorial de la Terre au voisinage de sa surface. Combien de fois l'énergie dépensée pour lancer un satellite dans le sens de la rotation de la Terre est-elle inférieure à l'énergie nécessaire pour le lancer dans le sens opposé? On néglige la résistance de l'air.

1.259. Un satellite artificiel de la Lune se déplace suivant une orbite circulaire dont le rayon est η fois supérieur à celui de la Lune. Son mouvement est ralenti à la suite d'une faible résistance offerte par la poussière cosmique. En supposant que la force de la résistance dépend de la vitesse comme $F = \alpha v^2$ où α est une constante, calculer la durée du mouvement du satellite avant d'alunir.

1.260. Déterminer la première et la seconde vitesses cosmiques pour la Lune. Comparer les valeurs obtenues avec vitesses correspondantes pour la Terre.

1.261. Un vaisseau spatial s'approche de la Lune en suivant une trajectoire parabolique presque à fleur de surface lunaire. Au moment de l'approchement maximal on met en marche la rétrofusée et le vaisseau aborde une orbite circulaire, tel un satellite de la Lune. Calculer l'accroissement de module de la vitesse du vaisseau lors du freinage.

1.262. Un vaisseau spatial est mis sur l'orbite circulaire au voisinage de la Terre. Quelle vitesse supplémentaire doit-on communiquer au vaisseau pour que celui-ci vainque l'attraction terrestre?

1.263. A quelle distance du centre de la Lune trouve-t-on le point où l'intensité du champ de gravitation résultant de la Terre et de la Lune est nulle? On suppose que la masse de la Terre est $\eta = 81$ fois plus grande que celle de la Lune et la distance entre les centres des planètes est $n = 60$ fois plus grande que le rayon de la Terre R.

1.264. Quel travail minimal doit-on fournir pour amener un vaisseau spatial de masse $m = 2{,}0 \cdot 10^3$ kg à partir de la Terre à la Lune?

1.265. Quelle vitesse minimale par rapport à la surface de la Terre doit-on communiquer à l'équateur à un corps pour qu'il puisse quitter le système Solaire? Résistance de l'air est négligeable.

Dynamique d'un solide

1.266. A un point dont le rayon vecteur par rapport à l'origine des coordonnées O est $\mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ est appliquée une force $\mathbf{F} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ où a, b, A, B sont des constantes, $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ les vecteurs unités des axes x et y. Déterminer le moment $\mathbf{N}$ et le bras du levier de la force $\mathbf{F}$ par rapport au point O.

1.267. On applique au point de rayon vecteur $\mathbf{r}_1 = a\mathbf{i}$ une force $\mathbf{F}_1 = A\mathbf{j}$ et au point de $\mathbf{r}_2 = b\mathbf{j}$ une force $\mathbf{F}_2 = B\mathbf{i}$. Ici les deux rayons vecteurs sont définis par rapport à l'origine des coordonnées O; $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ sont les vecteurs unités des axes x et y; a, b, A et B, des constantes. Déterminer le bras du levier de la force résultante par rapport au point O.

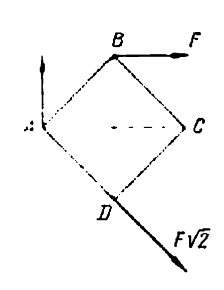


Fig. 52

1.268. A une plaque carrée s'appliquent trois forces, comme l'indique la fig. 52. Trouver le module, la direction et le point d'application de la résultante si ce point se situe sur le côté BC.

1.269. Calculer le moment d'inertie:

a) d'une mince tige homogène par rapport à un axe perpendiculaire passant par son extrémité si la masse de la tige est m et sa longueur l;

b) d'une mince plaque homogène rectangulaire par rapport à un axe passant par un de ses sommets perpendiculairement au plan de la plaque si les côtés de la plaque sont a et b et sa masse m.

1.270. Calculer le moment d'inertie:

a) d'un disque de cuivre homogène d'épaisseur $b = 2{,}0$ mm et de rayon $R = 100$ mm par rapport à l'axe de symétrie perpendiculaire au plan du disque;

b) d'un cône homogène plein par rapport à son axe de symétrie si la masse du cône est m et son rayon de base R.

1.271. Montrer que pour une mince plaque de forme quelconque il existe la relation suivante entre les moments d'inertie: $I_1 + I_2 = I_3$, où 1, 2, 3 sont trois axes orthogonaux issus d'un même point, les axes 1 et 2 étant dans le plan de la plaque. En employant cette relation, trouver le moment d'inertie d'un mince disque circulaire homogène de rayon R et de masse m par rapport à l'axe coïncidant avec l'un de ses diamètres.

1.272. Un disque homogène de rayon $R = 20$ cm a un trou circulaire comme le montre la fig. 53. La masse de la partie restante (hachurée) du disque est $m = 7,30$ kg. Calculer le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe passant par son centre d'inertie et perpendiculaire à son plan.

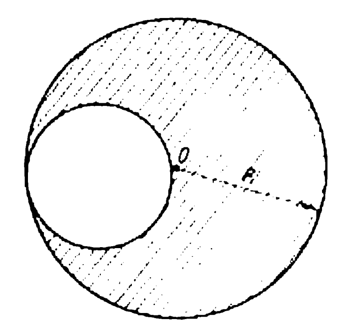


Fig. 53

1.273. En partant de la formule pour le moment d'inertie d'une sphère homogène, calculer le moment d'inertie d'une mince couche sphérique de masse m et de rayon R par rapport à l'axe passant par son centre.

1.274. Sur un cylindre plein homogène de masse M et de rayon R est enroulé un fil léger portant à son extrémité un corps de masse m (fig. 54). A l'instant $t = 0$ le système se met en mouvement. En négligeant le frottement dans l'axe du cylindre, déterminer en fonction du temps:

a) la vitesse angulaire du cylindre $\omega(t)$ si $\omega(0) = 0$;

b) l'énergie cinétique du système $T(t)$ si $T(0) = 0$.

1.275. Dans le problème précédent (fig. 54) la masse du corps est $m = 0,60$ kg, le rayon du cylindre est $R = 5,0$ cm, sa masse étant $\eta = 6,0$ fois plus grande que m. Calculer la valeur moyenne du moment de freinage dans l'axe du cylindre si $t = 2,0$ s après le commencement du mouvement la vitesse du corps est $v = 1,50$ m/s.

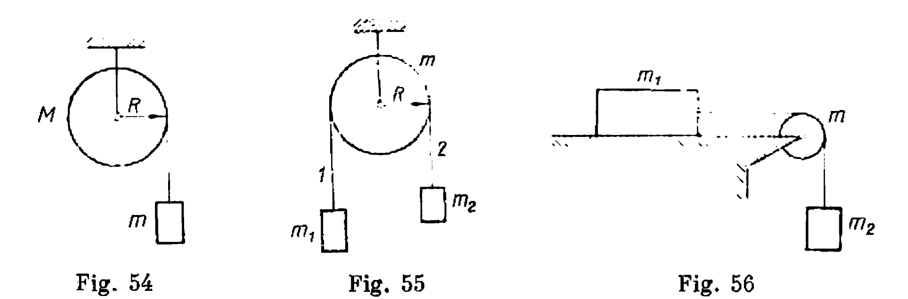


Fig. 54 Fig. 55 Fig. 56

1.276. Dans le montage de la fig. 55 on connaît la masse m du cylindre plein homogène et les masses des corps m_1 et m_2. Le glissement du fil et le frottement dans l'axe du cylindre sont absents. Déterminer l'accélération angulaire du cylindre et le rapport des tensions T_1/T_2 des brins verticaux *1* et *2* du fil lors du mouvement.

1.277. Dans le montage de la fig. 56 sont donnés les masses m_1 et m_2, le coefficient de frottement k entre le corps m_1 et la surface horizontale, ainsi que la masse m de la poulie assimilable à un disque homogène. Le fil passe sur la poulie sans glissement. A la date $t = 0$, le corps m_2 se met à descendre. En négligeant la masse du fil et le

frottement dans l'axe de la poulie, calculer le travail de la force de frottement, appliquée au corps m_1, fourni en premières t secondes à partir du commencement du mouvement.

1.278. La fig. 57 représente le schéma d'un régulateur de vitesse simple. L'arbre vertical O est muni d'une tige horizontale sur laquelle peuvent glisser librement les segments de frein K. Lorsque l'arbre tourne, les segments sont serrés contre la surface intérieure du cylindre immobile de rayon R. Calculer la puissance nécessaire pour faire tourner l'arbre à la vitesse angulaire constante ω si la masse de

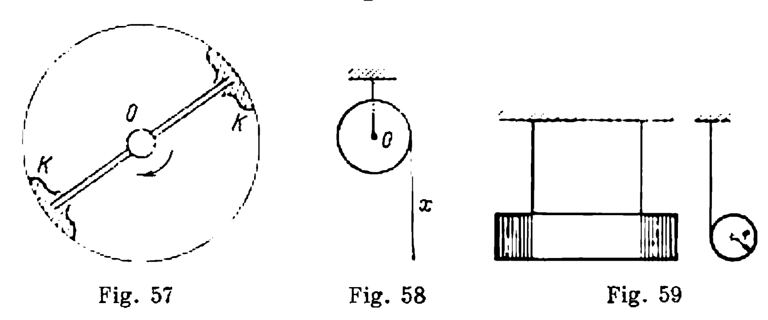


Fig. 57 Fig. 58 Fig. 59

chaque segment est m, leur épaisseur est sensiblement inférieure au rayon du cylindre et le coefficient de frottement entre les segments et le cylindre est k.

1.279. Un disque homogène de rayon R lancé à la vitesse angulaire ω est posé, avec précaution, sur un plan horizontal. Combien de temps tournera le disque si le coefficient de frottement est k? La pression exercée par le disque sur le plan est supposée uniforme.

1.280. Un volant lancé à la vitesse angulaire initiale ω_0 est freiné par les forces dont le moment par rapport à son axe est proportionnel à la racine carrée de sa vitesse angulaire. Déterminer la vitesse angulaire moyenne du volant pendant tout le mouvement.

1.281. Un cylindre plein homogène de rayon R et de masse M est libre à tourner autour d'un axe horizontal fixe O (fig. 58). Sur le cylindre est enroulé, en une couche, un fil fin de longueur l et de masse m. Calculer l'accélération angulaire du cylindre en fonction de la longueur x de la partie pendante du fil. Supposer que le centre d'inertie de la partie enroulée du fil est situé sur l'axe du cylindre.

1.282. Une sphère homogène de masse m et de rayon R roule sans glisser sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Déterminer :

a) les valeurs du coefficient de frottement pour lesquelles le glissement est absent ;

b) l'énergie cinétique de la sphère t secondes après le commencement du mouvement.

1.283. A l'instant $t = 0$ un cylindre homogène de masse $m = 8,0$ kg et de rayon $R = 1,3$ cm (fig. 59) se met à descendre

sous l'action de la pesanteur. En négligeant la masse du fil, déterminer :

a) la tension de chaque fil et l'accélération angulaire du cylindre ;

b) la puissance instantanée développée par la force de la pesanteur en fonction du temps.

1.284. Un cylindre plein homogène de masse m repose sur deux rails horizontaux. Une force constante verticale F est appliquée à l'extrémité pendante d'un fil enroulé autour du cylindre (fig. 60). Déterminer la valeur maximale de la force F pour laquelle le cylindre roulera encore sans glisser, le coefficient de frottement du cylindre sur les rails étant k. Avec quelle accélération se déplacera alors son axe?

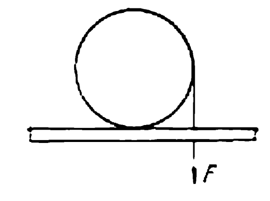


Fig. 60

1.285. Une bobine de masse m repose sur un plan horizontal. Son moment d'inertie par rapport à son propre axe $I = \beta m R^2$, où β est un coefficient numérique, R le rayon extérieur de la bobine. Le rayon de la couche du fil enroulé est r, le coefficient de frottement de la bobine sur le plan k. On tire sur le fil, sans provoquer le glissement, avec une force constante $\mathbf{F}$ faisant un angle α avec l'horizontale (fig. 61). Déterminer :

a) la valeur et le sens de l'accélération que prend l'axe de la bobine ;

b) le travail de la force $\mathbf{F}$ en t premières secondes du mouvement.

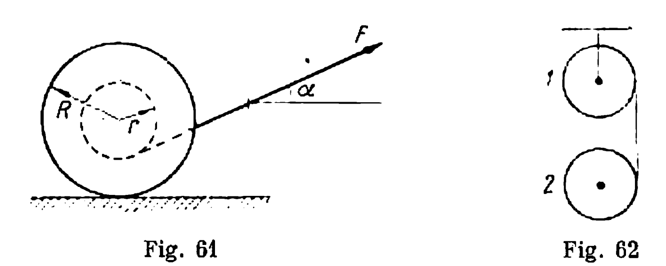


Fig. 61 Fig. 62

1.286. Un dispositif (fig. 62) se compose de deux cylindres pleins homogènes identiques sur lesquels sont enroulés symétriquement deux fils sans masse. Déterminer la tension de chaque fil au cours du mouvement si la masse de chaque cylindre est m. Le frottement dans l'axe du cylindre supérieur est nul.

1.287. Dans le montage (fig. 63) sont donnés la masse m de la charge A, la masse M de la poulie B, le moment d'inertie I de celle-ci par rapport à son axe et les rayons de la poulie R et $2R$. Les masses des fils sont négligeables. Le système abandonné à lui-même, trouver l'accélération de la charge A.

1.288. Un cylindre A plein homogène de masse m_1 peut tourner librement autour d'un axe horizontal fixé sur un support B de

masse m_2 (fig. 64). Sur le cylindre est enroulé un fil léger à l'extrémité C duquel on applique une force constante horizontale. Les forces de frottement entre le support et le plan de base horizontal sont nulles. Déterminer:

a) l'accélération du point C;

b) l'énergie cinétique de ce système t secondes après le commencement du mouvement.

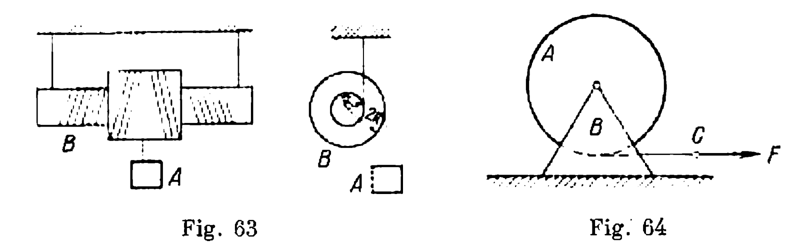


Fig. 63 Fig. 64

1.289. Une planche de masse m_1 portant une sphère homogène de masse m_2 repose sur un plan horizontal lisse. On applique à la planche une force constante horizontale F. Avec quelles accélérations se déplaceront la planche et le centre de la sphère en l'absence de glissement entre elles?

1.290. Un cylindre plein homogène de masse m et de rayon R mis en rotation autour de son axe avec une vitesse angulaire ω_0 est posé ensuite sur un plan horizontal et abandonné à lui-même. Le coefficient de frottement entre le cylindre et le plan est égal à k. Déterminer:

a) le temps pendant lequel le cylindre se déplace avec glissement;

b) le travail total de la force de frottement de glissement agissant sur le cylindre.

1.291. Une bille homogène de rayon r roule sans glisser à partir du sommet d'une sphère de rayon R. Déterminer la vitesse angulaire de la bille après qu'elle quitte la sphère. La vitesse initiale de la bille est négligeable.

1.292. Un cylindre plein homogène de rayon $R = 15$ cm roule sur un plan horizontal suivi d'un plan incliné faisant un angle

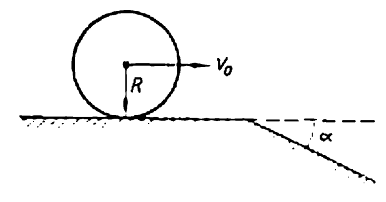


Fig. 65

$\alpha = 30°$ avec l'horizontale (fig. 65). Déterminer la vitesse maximale v_0 pour laquelle le cylindre abordera le plan incliné encore sans sauter. Glissement est absent.

1.293. Un cerceau rigide mince de rayon R est posé verticalement sur le plancher, au voisinage du point de contact avec le plancher on fixe au cerceau un petit corps A (fig. 66) de la même masse que le cerceau. On communique ensuite à l'axe du cerceau une vitesse horizontale v_0. Pour quelles valeurs de v_0 le cerceau ne sautera pas? Le cerceau roule sans glisser.

1.294. Déterminer l'énergie cinétique d'une chenille d'un tracteur animé d'une vitesse v si la masse de la chenille est m (fig. 67).

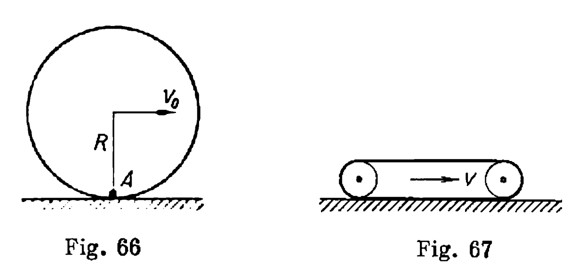


Fig. 66 Fig. 67

1.295. Une sphère homogène de masse m et de rayon r roule sans glisser sur un plan horizontal en tournant autour d'un axe horizontal OA (fig. 68). Le centre de la sphère décrit alors une circonférence de rayon R avec la vitesse v. Energie cinétique de la sphère?

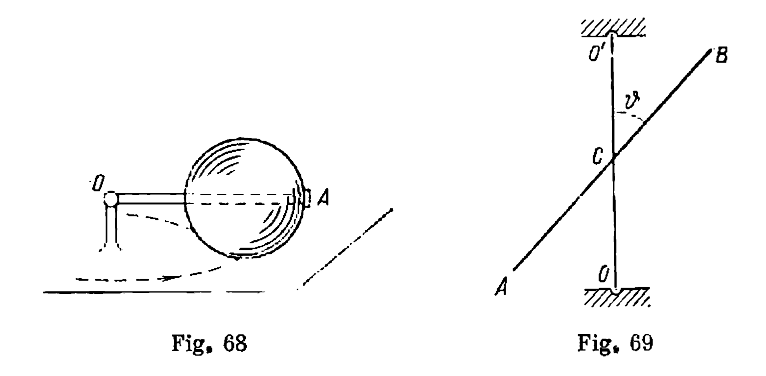


Fig. 68 Fig. 69

1.296. Démontrer qu'un corps de masse m, placé dans un référentiel tournant à la vitesse angulaire constante ω autour d'un axe immobile, est soumis à une résultante:

a) qui est une force centrifuge d'inertie $\mathbf{F}_{cf} = m\omega^2\boldsymbol{\rho}_C$, où $\boldsymbol{\rho}_C$ est le rayon vecteur du centre d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation;

b) qui est une force de Coriolis $\mathbf{F}_C = 2m\,[\mathbf{v}'_C\boldsymbol{\omega}]$, où $\mathbf{v}'_C$ est la vitesse du centre d'inertie du corps dans le référentiel en rotation.

1.297. Une tige AB mince homogène de masse m et de longueur l est rigidement liée par son milieu à l'axe de rotation OO' comme le montre la fig. 69. La barre est mise en rotation à la vitesse angulaire

constante ω. Déterminer, dans le référentiel lié à l'axe OO' et à la barre, le moment résultant des forces centrifuges d'inertie par rapport au point C.

1.298. Un pendule conique constitué par une tige mince homogène de longueur l et de masse m tourne uniformément autour d'un axe vertical à la vitesse angulaire ω (l'extrémité supérieure de la tige est articulée). Déterminer l'angle ϑ entre la tige et la verticale.

1.299. Une tige AB homogène lisse de masse M et de longueur l tourne librement à la vitesse angulaire ω_0 dans un plan horizontal autour d'un axe vertical fixe passant par son extrémité A. Un petit manchon de masse m se met à glisser à partir du point A. Calculer la vitesse du manchon par rapport à la tige à l'instant où il atteint l'extrémité B de celle-ci.

1.300. Une tige homogène de masse $m = 5{,}0$ kg et de longueur $l = 90$ cm repose sur une surface horizontale lisse. On produit un choc contre l'une de ses extrémités dans une direction horizontale perpendiculaire à la tige, en lui communiquant ainsi une impulsion $p = 3{,}0$ N·s. Calculer la force exercée par une moitié de la tige sur l'autre au cours du mouvement.

1.301. Une mince plaque homogène carrée de côté l et de masse M peut tourner librement autour d'un axe vertical fixe confondu avec l'un de ses côtés. Une petite bille de masse m animée d'une vitesse $\mathbf{v}$ normale à la plaque entre en collision avec la plaque, en son centre, de façon élastique. Déterminer:

a) la vitesse de la bille après le choc;

b) la composante horizontale de la force qu'exercera l'axe sur la plaque après le choc.

1.302. Une barre homogène verticale de masse M et de longueur l peut tourner autour de son extrémité supérieure. Une balle de masse m, en vol horizontal, vient s'enfoncer dans l'extrémité inférieure de la barre, en la faisant ainsi s'écarter d'un angle α. En supposant $m \ll M$ calculer:

a) la vitesse de la balle en vol;

b) l'accroissement de l'impulsion du système « balle-barre » pendant le choc; la cause de la variation de cette impulsion;

c) à quelle distance x mesurée à partir de l'extrémité supérieure de la barre doit s'enfoncer la balle pour que l'impulsion du système « balle-barre » ne varie pas pendant le choc.

1.303. Un disque homogène de masse M et de rayon R, disposé horizontalement, tourne librement autour d'un axe vertical fixe passant par son centre. Le disque est muni d'un guide radial sur lequel peut coulisser sans frottement un petit corps de masse m. Ce dernier est attaché à un fil léger passant à travers l'axe creux du disque. Primitivement, le corps se trouvait au bord du disque et l'ensemble du système tournait à la vitesse angulaire ω_0. Ensuite, on sollicite l'extrémité inférieure du fil par une force F qui fait le corps s'approcher lentement de l'axe de rotation. Déterminer:

a) la vitesse angulaire du système en état final;

b) le travail fourni par cette force.

1.304. Un opérateur de masse m_1 est debout au bord d'un disque homogène horizontal de masse m_2 et de rayon R qui peut tourner librement autour d'un axe vertical fixe passant par son centre. A un certain moment, l'opérateur s'est mis en mouvement suivant le bord du disque, s'est déplacé d'un angle φ' par rapport au disque et s'est arrêté. Au cours du mouvement la vitesse de l'opérateur par rapport au disque était fonction du temps: $v'(t)$. En assimilant l'opérateur à un point matériel, calculer:

a) l'angle dont a tourné le disque avant l'arrêt de l'opérateur;

b) le moment de la force par rapport à l'axe de rotation qu'exerçait l'opérateur sur le disque lors du mouvement.

1.305. Deux disques horizontaux tournent librement autour d'un axe vertical passant par leurs centres. Les moments d'inertie des disques par rapport à cet axe sont I_1 et I_2, leurs vitesses angulaires, ω_1 et ω_2. Le disque supérieur vient tomber sur celui inférieur et quelque temps après, en vertu du frottement, ils se mettent à tourner comme un seul. Déterminer:

a) la vitesse angulaire établie des disques;

b) le travail fourni par les forces de frottement.

1.306. Une petite rondelle et une mince tige homogène, dont la longueur est l et la masse η fois plus grande que celle de la rondelle, reposent sur un plan horizontal lisse. Ayant reçu une vitesse $\mathbf{v}$ horizontale perpendiculaire à la tige, la rondelle vient heurter contre l'extrémité de la tige de façon élastique. Déterminer la vitesse de la rondelle et la vitesse angulaire de la tige après le choc. Pour quelle valeur η la vitesse de la rondelle après le choc sera-t-elle nulle? changera de sens?

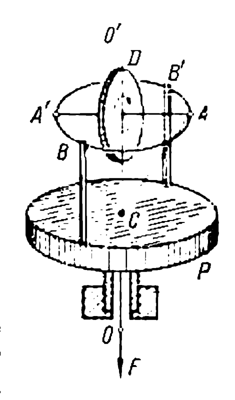


Fig. 70

1.307. Dans le montage de la fig. 70 un disque homogène D de masse m et de rayon R, posé sur un support P, peut tourner librement autour des axes AA' et BB' ; de plus le disque et le support peuvent tourner ensemble autour de l'axe vertical OO'. Le moment d'inertie du support par rapport à l'axe OO' est I. On communique au disque D une vitesse angulaire ω_0 par rapport à l'axe AA'. On applique ensuite une force à l'extrémité O du fil ACO pour mettre verticalement l'axe AA' du disque en rotation. En négligeant le frottement et les masses de l'axe AA' et du cadre $AB'A'B$, calculer:

a) la vitesse angulaire du support P en état final;

b) le travail de la force appliquée au fil.

1.308. Un moteur M et un contrepoids N sont installés sur une plate-forme P qui peut tourner librement autour d'un axe vertical

OO' (fig. 71). Le moment d'inertie de la plate-forme avec le moteur et le contrepoids par rapport à cet axe est I. Sur l'axe du moteur est fixé un cadre léger avec une sphère homogène A, cette dernière étant animée d'une vitesse angulaire ω_0 autour d'un axe BB' coïncidant avec l'axe OO'. Le moment d'inertie de la sphère par rapport à l'axe de rotation est I_0. Déterminer:

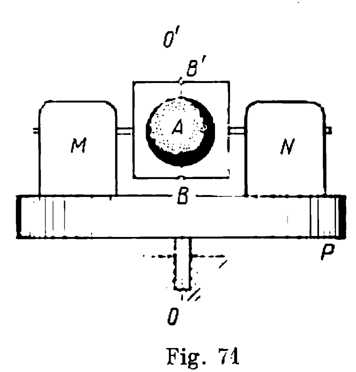


Fig. 71

a) le travail fourni par le moteur pour tourner l'axe BB' de 90°, de 180°;

b) le moment des forces extérieures retenant l'axe du dispositif dans la position verticale après, que le moteur tourne l'axe BB' de 90°.

1.309. Une tige homogène horizontale AB de masse $m = 1{,}40$ kg et de longueur $l_0 = 100$ cm tourne autour d'un axe vertical fixe OO' de longueur $l = 55$ cm passant par son extrémité A. Le point A est situé au milieu de l'axe OO'. Pour quelle valeur de la vitesse angulaire la composante horizontale de la force agissant sur l'extrémité inférieure de l'axe OO' sera-t-elle nulle? Quelle est alors la composante horizontale de la force appliquée à l'extrémité supérieure de cet axe?

1.310. Une tige homogène de masse m et de longueur l est rigidement liée, en son milieu, avec un axe vertical OO' de telle manière que la barre fait un angle ϑ avec l'axe (fig. 69). Les extrémités de l'axe OO' sont fixées dans les roulements à billes. Le système tourne sans frottement à la vitesse angulaire ω. Calculer:

a) la grandeur et l'orientation du moment cinétique **M** de la tige par rapport au point C ainsi que son moment cinétique par rapport à l'axe de rotation;

b) le module de l'accroissement du vecteur **M** par rapport au point C pendant un demi-tour;

c) le moment des forces extérieures appliqué à l'axe OO' lors de la rotation.

1.311. Une toupie de masse $m = 0{,}50$ kg, dont l'axe fait un angle $\vartheta = 30°$ avec la verticale, effectue une précession sous l'action de la pesanteur. Le moment d'inertie de la toupie par rapport à son axe de symétrie est $I = 2{,}0$ g·m², sa vitesse angulaire autour de cet axe $\omega = 350$ rd/s, la distance entre le point d'appui et le centre d'inertie de la toupie $l = 10$ cm. Calculer:

a) la vitesse angulaire de la précession de la toupie;

b) la valeur et le sens de la composante horizontale de la force de réaction agissant sur la toupie au point d'appui.

1.312. Un gyroscope est installé sur le plancher d'une cabine d'ascenseur qui se met à monter avec une accélération $w = 2{,}0$ m/s² (fig. 72). Le gyroscope est constitué par un disque homogène de

rayon $R = 5{,}0$ cm fixé à une extrémité d'une tige de longueur $l = 10$ cm. L'autre extrémité de la tige est articulée au point O. Le gyroscope effectue une précession à la vitesse angulaire $n = 0{,}5$ tour par seconde. En négligeant le frottement et la masse de la tige, calculer la vitesse angulaire propre du disque.

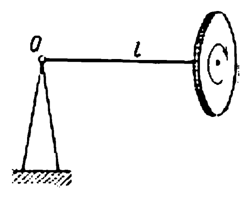


Fig. 72

1.313. Une toupie de masse $m = 1{,}0$ kg et de moment d'inertie $I = 4{,}0$ g·m² tourne à la vitesse angulaire $\omega = 310$ rd/s. Son point d'appui se trouve sur une plate-forme que l'on fait déplacer dans la direction horizontale avec une accélération constante $w = 1{,}0$ m/s². Le point d'appui et le centre d'inertie de la toupie sont distants de $l = 10$ cm. Déterminer la valeur et le sens du vecteur $\boldsymbol{\omega}'$, vitesse angulaire de la précession.

1.314. Une sphère homogène de masse $m = 5{,}0$ kg et de rayon $R = 6{,}0$ cm est animée d'une vitesse angulaire $\omega = 1\,250$ rd/s autour d'un axe horizontal passant par son centre. L'axe est monté sur le support dans les roulements à billes distants de $l = 15$ cm. On tourne le support autour d'un axe vertical avec la vitesse angulaire $\omega' = 5{,}0$ rd/s. Déterminer la valeur et le sens des forces gyroscopiques.

1.315. Un navire se déplace à la vitesse $v = 36$ km/h suivant un arc de circonférence de rayon $R = 200$ m. Calculer le moment des forces gyroscopiques agissant sur les paliers à roulements de la part de l'arbre avec volant qui ont le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation $I = 3{,}8 \cdot 10^3$ kg·m² et tournant à raison de $n = 300$ tours par minute. L'axe de rotation est installé le long du navire.

1.316. Une locomotive est mue par une turbine dont l'axe est parallèle aux axes des roues. Les sens de la rotation de la turbine et des roues coïncident. Le moment d'inertie du rotor de la turbine par rapport à son propre axe est $I = 240$ kg·m². Calculer la force de pression supplémentaire sur les rails due à l'effet gyroscopique lorsque la locomotive aborde un virage de rayon $R = 250$ m à la vitesse $v = 50$ km/h. La distance entre les rails est $l = 1{,}5$ m. La turbine tourne à raison de $n = 1\,500$ tours/min.

Déformations des solides

1.317. Quelle pression faut-il appliquer aux bases d'un cylindre en acier pour que sa longueur ne varie pas après l'augmentation de la température de 100 °C?

1.318. Quelle pression intérieure (en l'absence de la pression extérieure) peut supporter:

a) un tube en verre;

b) un ballon en verre sphérique,

dont les rayons sont $r = 25$ mm et l'épaisseur des parois $\Delta r = 1{,}0$ mm?

1.319. Une barre horizontale en cuivre de longueur $l = 1,0$ m tourne autour d'un axe vertical passant par son milieu. A quelle fréquence de rotation peut-elle rompre?

1.320. Un cerceau en fil de plomb de rayon $r = 25$ cm tourne autour d'un axe fixe vertical passant par son centre et normal à son plan. A quelle fréquence de rotation ce cerceau rompra-t-il?

1.321. Un fil d'acier de diamètre $d = 1,0$ mm est tendu horizontalement entre deux mandrins distants de $l = 2,0$ m. On suspend au point O en son milieu une charge de $m = 0,25$ kg. Calculer la flèche du fil au point O.

1.322. Une pièce élastique homogène se déplace sur un plan horizontal lisse sous l'action d'une force constante F répartie uniformément sur la surface de bout. L'aire du bout est S, le module de Young du matériau E. Déterminer la déformation relative de la pièce dans la direction de la force donnée.

1.323. Une mince tige en cuivre de longueur l et de masse m tourne uniformément à la vitesse angulaire ω dans un plan horizontal autour d'un axe vertical passant par son extrémité. Déterminer la tension dans la tige en fonction de la distance r à l'axe de rotation et l'allongement de la tige.

1.324. Un cylindre plein en cuivre de longueur $l = 65$ cm est posé sur un plan horizontal et soumis à l'action d'une force de compression verticale $F = 1000$ N uniformément répartie sur sa base supérieure. Calculer la variation du volume du cylindre en millimètres cubes.

1.325. Une barre en cuivre de longueur l est suspendue au plafond par son extrémité. Calculer:

a) l'allongement Δl sous l'action de son propre poids;

b) l'accroissement relatif de son volume.

1.326. Une pièce en matériau, dont le module de Young est E et le coefficient de Poisson μ, est soumise à une compression hydrostatique p. Etablir:

a) la diminution relative de son volume;

b) la relation entre le coefficient de dilatation volumique β et les constantes élastiques E et μ.

Montrer que le coefficient de Poisson μ ne peut dépasser $^1/_2$.

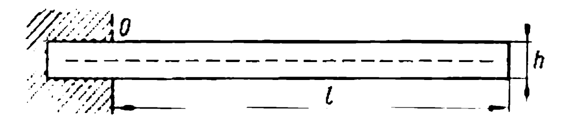


Fig. 73

1.327. Une poutre en acier de section rectangulaire est encastrée par une extrémité dans un mur (fig. 73). Elle fléchit légèrement sous l'action de son poids. Déterminer le rayon de courbure de la fibre neutre (en pointillé sur la figure) au voisinage du point O. La longueur

de la partie saillante de la poutre est $l = 6{,}0$ m, son épaisseur $h = 10$ cm.

1.328. La flexion d'une barre élastique est caractérisée par la forme de la déformée passant par les centres de gravité des sections droites de la barre. Pour de petites flexions, la déformée est donnée par l'équation

$$N(x) = EI\frac{d^2y}{dx^2},$$

où $N(x)$ est le moment fléchissant des forces élastiques dans la section de coordonnée x, E, le module de Young, I, le moment d'inertie de la section droite par rapport à l'axe passant par la fibre neutre ($I = \int z^2 dS$, fig. 74).

Soit une barre en acier, de section carrée, de côté a, encastrée par une extrémité dans un mur de sorte que la partie saillante a la

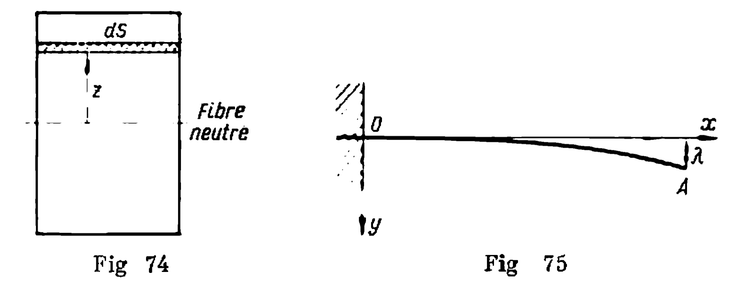


Fig 74 Fig 75

longueur l (fig. 75). En négligeant la masse de la barre, déterminer la forme de la déformée et la flèche λ si son extrémité A est soumise à l'action:

a) d'un moment fléchissant d'un couple de forces N_0;

b) d'une force F dirigée le long de l'axe des y.

1.329. Les extrémités d'une poutre d'acier de longueur l reposent librement sur deux appuis (fig. 76). Le moment d'inertie de sa

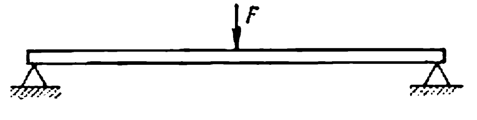


Fig 76

section droite est égal à I (voir le problème précédent). En supposant la masse de la poutre négligeable et la flexion faible, déterminer la flèche λ produite par la force F appliquée en son milieu.

1.330. Une poutre d'acier a une section rectangulaire de hauteur h. En utilisant l'équation donnée dans le problème 1.328, calculer la flèche λ occasionnée par le poids propre de la poutre pour deux cas:

a) la poutre est encastrée par une extrémité, la longueur de la partie saillante étant l (fig. 77, a) ;

b) la poutre de longueur $2l$ repose librement sur deux appuis (fig. 77, b).

1.331. Une plaque d'acier d'épaisseur h a la forme d'un carré de côté l, $h \ll l$. La plaque est rigidement liée à un axe vertical OO

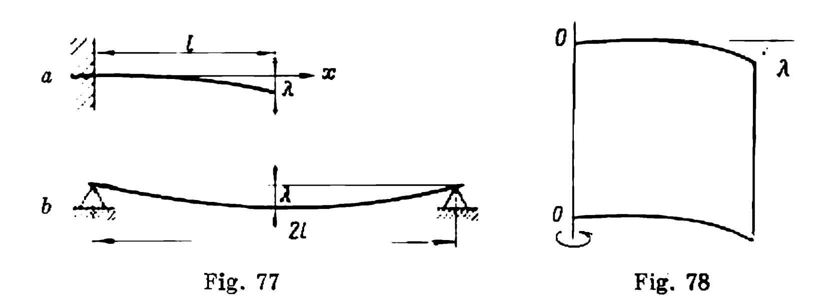


Fig. 77 Fig. 78

animé d'une accélération angulaire β (fig. 78). En supposant la flexion petite, trouver la flèche λ.

1.332. Etablir la liaison entre le moment de torsion N et l'angle de torsion φ pour:

a) un tube dont les parois ont une épaisseur Δr bien inférieure au rayon du tube;

b) une tige pleine de section circulaire.

On suppose connus leurs longueur l, rayon r et module de cisaillement G.

1.333. Un tube d'acier de longueur $l = 3{,}0$ m dont les diamètres intérieur et extérieur sont respectivement $d_1 = 30$ mm et $d_2 = 50$ mm subit la torsion d'un angle $\varphi = 2{,}0°$ autour de son axe. Calculer le moment des forces N qui produit cette torsion.

1.334. Déterminer la puissance maximale que l'on puisse transmettre par un arbre d'acier tournant autour de son axe à la vitesse angulaire $\omega = 120$ rd/s si sa longueur est $l = 200$ cm, son rayon $r = 1{,}50$ cm et l'angle de torsion admissible $\varphi = 2{,}5°$.

1.335. Une bague homogène, dont la masse est m et le rayon extérieur r_2, est emmanchée sur un arbre de rayon r_2. L'arbre est animé d'une accélération angulaire constante β autour de son axe. Déterminer le moment des forces élastiques dans la bague en fonction de la distance r à l'axe de rotation.

1.336. Déterminer l'énergie de déformation élastique d'une barre en acier de masse $m = 3{,}1$ kg soumise à l'extension de sorte que son allongement relatif est $\varepsilon = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$.

1.337. Une barre en acier cylindrique de longueur l et de rayon r est suspendue au plafond par son extrémité.

a) Calculer l'énergie U de la déformation élastique de la barre.

b) Exprimer U par l'accroissement relatif de la longueur de la barre $\Delta l/l$.

1.338. Quel travail faut-il fournir pour courber en cercle une bande d'acier longue de $l = 2{,}0$ m, large de $h = 6{,}0$ cm et épaisse de $\delta = 2{,}0$ mm? On suppose que le processus se déroule dans le domaine des déformations élastiques.

1.339. Déterminer l'énergie de déformation élastique d'une tige d'acier dont l'une extrémité est fixée et l'autre est tordue de l'angle $\varphi = 6{,}0°$. La longueur de la tige est $l = 1{,}0$ m, son rayon $r = 10$ mm.

1.340. Déterminer la distribution de la densité volumique d'énergie de la déformation élastique dans une barre d'acier en fonction de la distance r à son axe. La longueur de la barre est l, l'angle de torsion φ.

1.341. Déterminer la densité volumique d'énergie élastique dans l'eau douce à la profondeur $h = 1000$ m.

Hydrodynamique

1.342. Un fluide parfait coule dans un tube plan de section uniforme situé dans un plan horizontal et courbé comme l'indique la

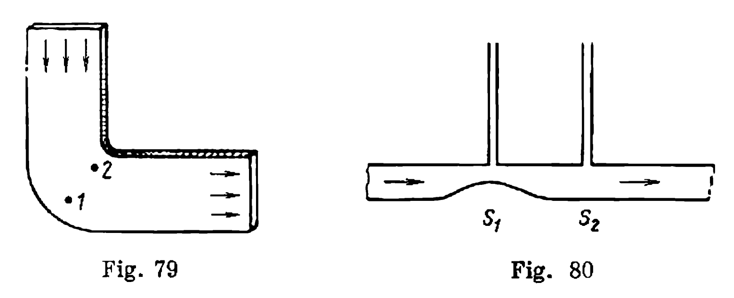


Fig. 79 Fig. 80

fig. 79. Le mouvement du fluide est stationnaire. Déterminer si les pressions et les vitesses dans les points *1* et *2* sont les mêmes. Quelle est la forme des lignes de courant?

1.343. Deux tubes manométriques sont insérés dans une conduite horizontale de section variable traversée par l'eau. Là, où sont installés les tubes manométriques, les sections de la conduite sont S_1 et S_2 (fig. 80). Calculer le volume d'eau passant à travers la section de la conduite par unité de temps si la différence entre les niveaux d'eau dans les tubes manométriques est égale à Δh.

1.344. Un tube de Pitot (fig. 81) est installé le long de l'axe d'un gazoduc dont la section intérieure est S. En négligeant la viscosité, calculer le volume de gaz traversant la section du tube en unité de temps si la différence des niveaux du manomètre à liquide est h et les densités de liquide et de gaz sont respectivement ρ_0 et ρ.

1.345. Un large récipient avec un petit orifice dans le fond est rempli d'eau et de kérosène. En négligeant la viscosité, déterminer la vitesse de l'eau qui s'en écoule si l'épaisseur de la couche d'eau est $h_1 = 30$ cm et celle de kérosène $h_2 = 20$ cm.

1.346. Un large récipient cylindrique de hauteur 50 cm rempli d'eau repose sur une table. En négligeant la viscosité, déterminer à quelle hauteur à partir du fond du récipient faut-il pratiquer un petit orifice pour que le jet d'eau qui s'en échappe vienne rencontrer la surface de la table à une distance maximale l_{max} du récipient? Valeur de l_{max}?

1.347. Un tube coudé est immergé dans l'eau, comme l'indique la fig. 82. La vitesse du courant par rapport au tube est $v = 2{,}5$ m/s.

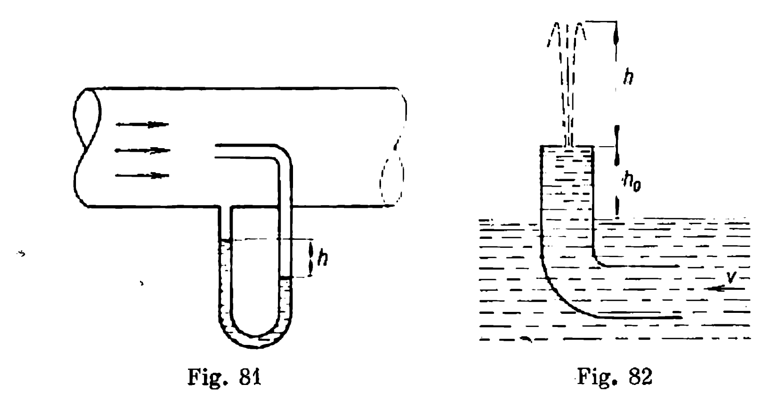


Fig. 81 Fig. 82

L'extrémité supérieure fermée est dotée d'un petit orifice et se trouve à la hauteur $h_0 = 12$ cm. Quelle hauteur h atteindra le jet d'eau sortant de l'orifice?

1.348. Dans le fond horizontal d'un large récipient rempli de liquide parfait est pratiqué un orifice rond de rayon R_1 au-dessus duquel est fixé un cylindre circulaire fermé de rayon $R_2 > R_1$

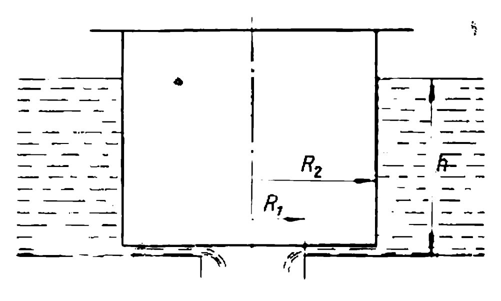


Fig. 83

(fig. 83). L'interstice entre le cylindre et le fond du récipient est petite, la densité du liquide ρ. Etablir la pression statique du liquide dans l'interstice comme fonction de la distance r de l'axe de l'orifice et du cylindre.

1.349. Quel travail doit-on fournir, en appliquant au piston une force constante, pour chasser au bout du temps t toute l'eau

contenue dans le cylindre horizontal (fig. 84)? Le volume de l'eau est V, la section de l'orifice s, s étant sensiblement inférieure à l'aire du piston. Le frottement et la viscosité sont négligeables.

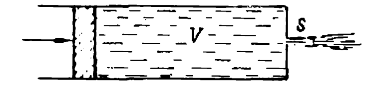
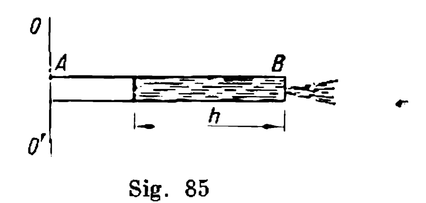


Fig. 84

1.350. Un récipient cylindrique, dont la hauteur est h et l'aire de la base S, est rempli d'eau. On ouvre, dans le fond, un petit orifice d'aire $s \ll S$. En négligeant la viscosité, déterminer le temps au bout duquel le récipient sera vidé.

1.351. Un tube AB horizontal de longueur l tourne à la vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical fixe OO' passant par l'extrémité A. Le tube contient du fluide parfait. L'extrémité A



Sig. 85

est ouverte, tandis que l'extrémité B, fermée, a un très petit orifice. Déterminer en fonction de la « hauteur » du fluide h sa vitesse d'écoulement par rapport au tube (fig. 85).

1.352. L'équation fondamentale de la dynamique pour un élément de fluide parfait a la forme:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial l} + \rho g_l,$$

où ρ est la densité de fluide, $\partial p/\partial l$ le gradient de pression le long de l'axe du tube de courant, g_l la projection de l'accélération dela pesanteur.

1. Déduire cette équation en partant du principe fondamental de la dynamique.

2. Montrer qu'il en découle l'équation de Bernoulli.

1.353. On a ouvert deux orifices identiques, d'aire $S = 0{,}50$ cm^2 chacun, pratiqués dans des parois opposées d'un large récipient verticale rempli d'eau. La hauteur des orifices diffère de $\Delta h = 51$ cm. Calculer la force résultante de réaction de l'eau s'écoulant du récipient.

1.354. Dans la paroi latérale d'un large récipient cylindrique de hauteur $h = 75$ cm est pratiquée une étroite fente verticale dont l'extrémité inférieure est au niveau du fond. La longueur de la fente

$l = 50$ cm, la largeur $b = 1{,}0$ mm. La fente fermée, on remplit le récipient d'eau. Calculer, à l'instant où l'on ouvre la fente, la force résultante de réaction de l'eau qui s'écoule.

1.355. L'eau s'écoule d'une grande cuve par un tube de rayon intérieur $r = 0{,}50$ cm courbé sous un angle droit (fig. 86). La longueur de la partie horizontale du tube est $l = 22$ cm. Le débit d'eau est $Q = 0{,}50$ l/s. Déterminer le moment, par rapport au point O, des forces de réaction exercées par l'eau sur les parois de ce tube.

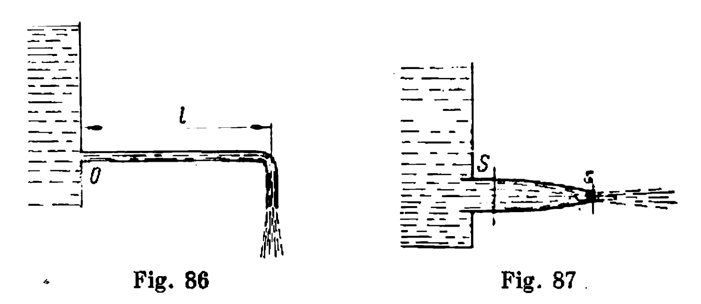


Fig. 86 Fig. 87

1.356. La paroi latérale d'une large cuve ouverte est dotée d'un tube se rétrécissant (fig. 87) par lequel s'écoule l'eau. La section du tube diminue de $S = 3{,}0$ cm² à $s = 1{,}0$ cm². Le tube se situe de $h = 4{,}6$ m au-dessous du niveau de l'eau dans la cuve. En négligeant la viscosité de l'eau, calculer la composante horizontale de la force arrachant le tube.

1.357. Un récipient cylindrique vertical contenant de l'eau est animé d'une rotation à la vitesse angulaire constante ω autour de son axe. Etablir:

a) la forme de la surface libre de l'eau;

b) la distribution suivant le rayon de la pression exercée par l'eau sur le fond du récipient, la pression au centre du fond étant p_0.

1.358. Un disque fin horizontal de rayon $R = 10$ cm se trouve dans une cavité cylindrique remplie d'huile dont le coefficient de

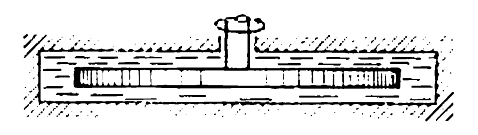


Fig. 88

viscosité $\eta = 0{,}08$ Po. Les interstices entre le disque et les bases horizontales de la cavité (fig. 88) sont les mêmes et valent $h = 1{,}0$ mm. Déterminer la puissance développée par les forces visqueuses s'exerçant sur le disque lorsque celui-ci tourne à la vitesse angulaire $\omega = 60$ rd/s. Les effets aux limites sont négligeables.

1.359. Un long cylindre de rayon R_1, situé à l'intérieur d'un cylindre coaxial immobile de rayon R_2, se déplace le long de son

axe à la vitesse constante v_0. L'espace entre les cylindres est rempli de fluide visqueux. Déterminer la vitesse du fluide en fonction de la distance r à l'axe des cylindres. L'écoulement est laminaire.

1.360. Un fluide à coefficient de viscosité η se trouve dans l'interstice entre deux longs cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2, $R_1 < R_2$. Le cylindre intérieur est immobile, alors que celui extérieur est animé d'une rotation à la vitesse angulaire constante ω_2. L'écoulement du fluide est laminaire. Etant donné que la force de frottement agissant sur l'unité de l'aire d'une surface cylindrique de rayon r est déterminée par la formule $\sigma = \eta r\,(\partial\omega/\partial r)$ N/m², trouver:

a) la vitesse angulaire du fluide en rotation en fonction du rayon r;

b) le moment des forces de frottement agissant sur l'unité de longueur du cylindre extérieur.

1.361. Un tube de longueur l et de rayon R est traversé par un fluide en mouvement stationnaire. La densité du fluide est ρ, le coefficient de viscosité η. La vitesse d'écoulement du fluide est donnée, en fonction de la distance r à l'axe du tube, par la loi $v = v_0\,(1 - r^2/R^2)$. Déterminer:

a) le volume de fluide traversant la section du tube en unité de temps;

b) l'énergie cinétique du fluide contenu dans le volume de tube;

c) la force de frottement exercée par le fluide sur le tube;

d) la différence de pression aux extrémités du tube.

1.362. Dans le montage de la fig. 89 un fluide visqueux s'écoule par un tube d'un large récipient A. La densité du fluide est $\rho = 1{,}0$ g/cm³. Calculer la vitesse du fluide sortant si $h_1 = 10$ cm, $h_2 = 20$ cm et $h_3 = 35$ cm. Les distances l sont égales.

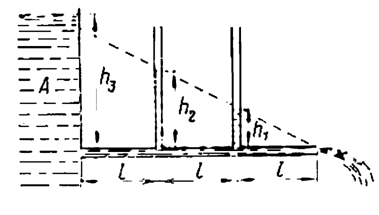


Fig. 89

1.363. Le rayon de la section d'une conduite diminue de façon monotone selon la loi $r = r_0 e^{-\alpha x}$, où $\alpha = 0{,}50$ m⁻¹, x, la distance à partir du début de la conduite. Déterminer le rapport des nombres de Reynolds dans les sections distantes de $\Delta x = 3{,}2$ m.

1.364. L'écoulement laminaire autour d'une bille de rayon $r_1 = 1{,}2$ mm se déplaçant dans la glycérine est observé pour les vitesses de la bille ne dépassant pas $v_1 = 23$ cm/s. A quelle vitesse minimale v_2 de la bille de rayon $r_2 = 5{,}5$ cm se déplaçant dans l'eau l'écoulement devient turbulent? Les coefficients de viscosité de la glycérine et de l'eau sont respectivement $\eta_1 = 13{,}9$ Po et $\eta_2 = 0{,}011$ Po.

1.365. Un haut récipient est rempli de glycérine à coefficient de viscosité $\eta = 13{,}9$ Po. On y laisse tomber une bille de plomb. Ayant atteint une certaine profondeur la bille commence à se déplacer uniformément. Déterminer le diamètre maximal de la bille pour

lequel le mouvement reste encore laminaire si le passage au mouvement turbulent correspond au nombre de Reynolds Re = 0,5 (cette valeur de Re est obtenue en prenant pour dimension caractéristique le diamètre de la bille).

1.366. Une bille d'acier de diamètre $d = 3{,}0$ mm est lâchée sans vitesse initiale dans l'huile d'olive à coefficient de viscosité $\eta = 0{,}90$ Po. Dans combien de temps après le début du mouvement la vitesse de la bille se distinguera-t-elle de la vitesse stationnaire de $n = 1{,}0$ % ?

Oscillations

1.367. Un point effectue des oscillations le long de l'axe x conformément à l'équation $x = a \cos(\omega t - \pi/4)$.

Tracer les diagrammes:

a) du déplacement x, de la vitesse $\dot{x}$ et de l'accélération $\ddot{x}$ en fonction du temps;

b) de $\dot{x}$ et de $\ddot{x}$ en fonction de x.

1.368. Un point se meut le long de l'axe x d'après la loi $x = a \sin^2(\omega t - \pi/4)$. Déterminer:

a) l'amplitude et la période de l'oscillation; tracer le diagramme $x(t)$;

b) la vitesse x du point en fonction de la coordonnée x; tracer le graphique de cette fonction.

1.369. Une particule effectue des oscillations harmoniques le long de l'axe x autour de sa position d'équilibre $x = 0$. La pulsation des oscillations est $\omega = 4{,}00$ rd/s. A un certain moment l'abscisse de la particule est $x_0 = 25{,}0$ cm et sa vitesse $\dot{x}_0 = 100$ cm/s. Trouver l'abscisse x et la vitesse $\dot{x}$ de cette particule $t = 2{,}40$ s après ce moment.

1.370. Une particule est animée d'une oscillation harmonique. Aux distances x_1 et x_2 de la position d'équilibre les vitesses de la particule sont respectivement v_1 et v_2. Pulsation et amplitude des oscillations?

1.371. Un point est animé, le long d'une droite, d'une oscillation harmonique de période $T = 0{,}60$ s et d'amplitude $a = 10{,}0$ cm. Déterminer la vitesse moyenne du point pendant le temps mis au parcours de $s = a/2$ compté:

a) à partir de sa position extrême;

b) à partir de sa position d'équilibre.

1.372. A la date $t = 0$, un point commence à osciller le long de l'axe x selon la loi $x = a \sin \omega t$, où a et ω sont des constantes. Quels sont, au bout de $^3/_8$ de la période depuis le début du mouvement:

a) la valeur moyenne de la projection de son vecteur vitesse $\langle \dot{x} \rangle$;

b) le module du vecteur vitesse moyenne $|\langle \mathbf{v} \rangle|$;

c) la valeur moyenne du module de la vitesse $\langle v \rangle$.

1.373. Le mouvement d'une particule le long de l'axe x est donné par l'équation $x = a \cos \omega t$. Déterminer le chemin qu'elle parcourra dans l'intervalle de temps compris entre $t = 0$ et t.

1.374. A l'instant $t = 0$, une particule se met en mouvement le long de l'axe x de sorte que sa vitesse est régie par l'équation $\dot{x} = 35 \cos \pi t$ cm/s (t en s). Déterminer le chemin parcouru par la particule $t = 2{,}80$ s après le commencement du mouvement.

1.375. Une particule effectue, le long de l'axe x, des oscillations harmoniques définies par $x = a \cos \omega t$. En posant la probabilité w de ce que la particule se trouve dans l'intervalle entre $-a$ et $+a$ égale à l'unité, établir en fonction de x la densité de probabilité dw/dx, où dw est la probabilité de ce que la particule se trouve dans l'intervalle entre x et $x + dx$. Tracer le graphique de dw/dx en fonction de x.

1.376. Déterminer en se servant du diagramme de Fresnel l'amplitude a de l'oscillation résultant de la superposition des oscillations de la même direction suivantes :

a) $x_1 = 3{,}0 \cos (\omega t + \pi/3)$, $x_2 = 8{,}0 \sin (\omega t + \pi/6)$;

b) $x_1 = 3{,}0 \cos \omega t$, $x_2 = 5{,}0 \cos (\omega t + \pi/4)$, $x_3 = 6{,}0 \sin \omega t$.

1.377. Un point effectue simultanément deux oscillations de même direction définies par les équations $x_1 = a \cos \omega t$ et $x_2 = a \cos 2\omega t$. Déterminer la vitesse maximale du point.

1.378. L'oscillation résultant de la superposition des deux oscillations harmoniques de même direction a pour expression $x = a \cos 2{,}1\, t \cdot \cos 50{,}0\, t$, où t est en secondes. Déterminer les pulsations des oscillations composantes et la période des battements de l'oscillation résultante.

1.379. Une bille suspendue à un ressort effectue des oscillations harmoniques verticales d'une pulsation déterminée. En communiquant au point de suspension des oscillations harmoniques de direction verticale, de fréquence 20 ou 24 Hz on obtient, dans les deux cas, les battements de même fréquence. Pour quelle fréquence du point de suspension celle des battements doublera-t-elle?

1.380. Le mouvement d'un point dans le plan xy est défini par l'équation $x = a \sin \omega t$, $y = b \cos \omega t$, où a, b et ω sont des constantes positives. Déterminer:

a) l'équation de la trajectoire du point $y(x)$ et le sens du déplacement de celui-ci sur la trajectoire;

b) l'accélération $\mathbf{w}$ du point en fonction de son rayon vecteur $\mathbf{r}$ par rapport à l'origine des coordonnées.

1.381. Etablir l'équation de la trajectoire d'un point dont le mouvement est défini par les équations:

a) $x = a \sin \omega t$, $y = a \sin 2\omega t$;

b) $x = a \sin \omega t$, $y = a \cos 2\omega t$.

Tracer les graphiques de ces trajectoires.

1.382. Déterminer la période des petites oscillations verticales d'une bille de masse $m = 40$ g fixée au milieu d'une corde de lon-

gueur $l = 1{,}0$ m. La corde est tendue horizontalement, sa tension est supposée constante et égale à $F = 10$ N.

1.383. Une bille suspendue à un fil de longueur $l = 20$ cm assimilable à un pendule simple est placée dans un liquide parfait dont la densité est $\eta = 3{,}0$ fois plus petite que celle de la bille. Déterminer la période des petites oscillations de ce pendule.

1.384. Calculer la période des petites oscillations d'un aréomètre (fig. 90) mis en mouvement par une petite impulsion suivant la

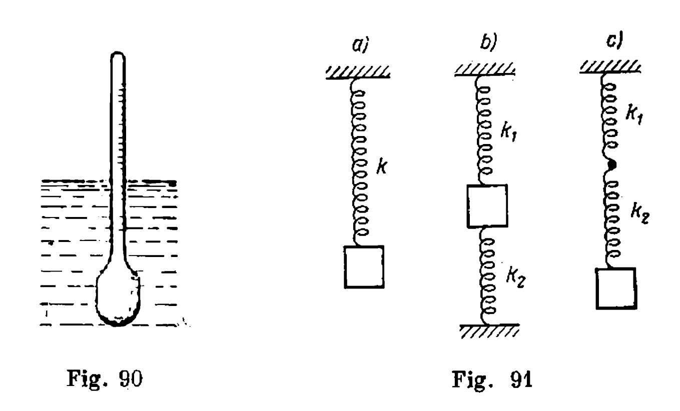


Fig. 90 Fig. 91

verticale. La masse de l'aréomètre est $m = 50$ g, le rayon de sa tige $r = 3{,}2$ mm, la densité de liquide $\rho = 1{,}00$ g/cm^3. Le liquide est supposé parfait.

1.385. Déterminer la période des petites oscillations verticales d'un corps de masse m dans les cas *a*), *b*) et *c*) représentés fig. 91. On connaît les raideurs des ressorts (elles sont indiquées sur la figure). Les masses des ressorts sont négligeables.

Fig. 92

1.386. Un corps de masse M, posé sur un plan horizontal lisse, est relié à une paroi verticale par l'intermédiaire d'un ressort horizontal de masse m. La raideur du ressort est k. Déterminer la pulsation des petites oscillations de ce système en supposant, pour simplifier, que tous les points du ressort oscillent en phase.

1.387. Déterminer la période des oscillations d'une masse $m = 200$ g de mercure versé dans un tube coudé (fig. 92) dont la branche droite fait un angle $\vartheta = 30°$ avec la verticale. La section du tube est $S = 0{,}50$ cm^2. On néglige la viscosité du mercure.

1.388. Une tige homogène est placée sur deux tambours en rotation rapide, comme le montre la fig. 93. La distance entre les axes des tambours est $l = 20$ cm, le coefficient de frottement entre la

tige et les tambours $k = 0,18$. Montrer que la tige effectuera les oscillations harmoniques. Calculer leur période.

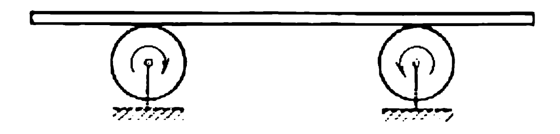


Fig. 93

1.389. Imaginons-nous un puits foré à travers la Terre suivant son axe de rotation. En assimilant la Terre à une sphère homogène et en négligeant la résistance de l'air, déterminer :

a) la loi du mouvement du corps tombé dans le puits ;

b) le temps mis par le corps pour atteindre l'extrémité opposée du puits ;

c) la vitesse du corps au centre de la Terre.

1.390. Déterminer la période des petites oscillations d'un pendule simple, de longueur l, dont le point de suspension se déplace par rapport au sol dans une direction arbitraire avec une accélération constante $\mathbf{w}$. Application numérique : $l = 21$ cm, $w = g/2$, l'angle entre les vecteurs $\mathbf{w}$ et $\mathbf{g}$ est $\beta = 120°$.

1.391. Dans le montage représenté fig. 94 le manchon M de masse $m = 0,20$ kg est fixé entre deux ressorts identiques dont la raideur est $k = 20$ N/m. Le manchon peut glisser sans frottement

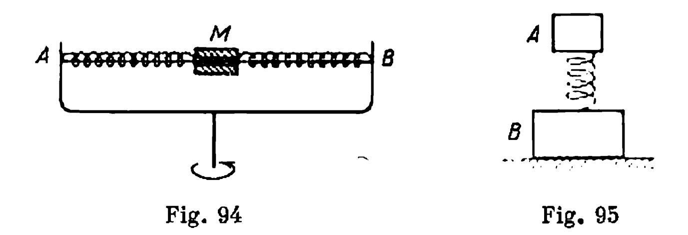


Fig. 94 Fig. 95

sur une tige horizontale AB. Le système est animé d'une rotation uniforme à la vitesse angulaire $\omega = 4,4$ rd/s autour d'un axe vertical passant par le milieu de la tige. Calculer la période des petites oscillations du manchon. Pour quelle valeur de ω le manchon n'oscillera pas?

1.392. Une planche portant un corps exécute des oscillations harmoniques horizontales dont l'amplitude est $a = 10$ cm. Déterminer le coefficient de frottement entre le corps et la planche si le corps commence à glisser sur la planche lorsque la période des oscillations de cette dernière est inférieure à $T = 1,0$ s.

1.393. Déterminer, en fonction du temps, l'angle d'écart d'un pendule simple de longueur 80 cm si à l'instant initial :

a) on écarte le pendule de 3,0° et l'abandonne ensuite à lui-même ;

b) on communique une vitesse horizontale de 0,22 m/s à l'extrémité inférieure du pendule qui est à l'état d'équilibre;

c) on écarte le pendule de 3,0° et communique à son extrémité inférieure une vitesse de 0,22 m/s dirigée vers la position d'équilibre.

1.394. Un corps A de masse $m_1 = 1{,}00$ kg est relié au corps B de masse $m_2 = 4{,}10$ kg par un ressort comme indiqué fig. 95. Le corps A exécute suivant la verticale des oscillations harmoniques libres d'amplitude $a = 1{,}6$ cm et de pulsation $\omega = 25$ rd/s. En négligeant la masse du ressort, déterminer les valeurs maximale et minimale de la force de pression exercée par ce système sur le plan support.

1.395. Une planche portant un corps de masse m commence à se déplacer verticalement vers le haut conformément à la loi $y = a(1 - \cos \omega t)$, où y est le déplacement, $\omega = 11$ rd/s. Déterminer:

a) la force de pression exercée par le corps sur la planche en fonction du temps pour $a = 4{,}0$ cm; tracer le graphique de cette fonction;

b) l'amplitude minimale d'oscillations de la planche pour laquelle le corps commence à se détacher de la planche;

c) l'amplitude d'oscillations de la planche pour laquelle le corps sautera à une hauteur $h = 50$ cm par rapport à la position initiale (à l'instant $t = 0$).

1.396. A un ressort non tendu fixé par son extrémité supérieure est accroché un corps de masse m abandonné ensuite sans vitesse initiale. La raideur du ressort est k. En négligeant sa masse, déterminer:

a) la loi du mouvement du corps $y(t)$, où y est son élongation;

b) les tensions maximale et minimale du ressort au cours du mouvement.

1.397. Une particule de masse m est sollicitée par une force $\mathbf{F} = -\alpha m \mathbf{r}$, où α est une constante positive, $\mathbf{r}$, le rayon vecteur de la particule par rapport à l'origine des coordonnées. Déterminer la trajectoire de son mouvement étant donné qu'à l'instant zéro le rayon vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ et la vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, de plus $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{r}_0$.

1.398. Un corps de masse m est accroché à un ressort fixé au plafond d'une cabine d'ascenseur. La raideur du ressort est k. Au moment $t = 0$ la cabine démarre vers le haut avec une accélération w. En négligeant la masse du ressort, établir l'équation du mouvement du corps $y(t)$ par rapport à la cabine étant donné que $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = 0$. Deux cas sont à envisager:

a) l'accélération w de la cabine est constante;

b) $w = \alpha t$, où α est une constante.

1.399. Un corps de masse $m = 0{,}50$ kg est suspendu à une corde élastique de coefficient d'élasticité $k = 50$ N/m. Quel déplacement maximal vers le bas peut-on communiquer au corps pour que ses oscillations soient encore harmoniques? Quelle est alors l'énergie des oscillations du corps?

1.400. Un corps de masse m tombe d'une hauteur h sur le plateau d'une balance à ressort (fig. 96). Les masses du plateau et du ressort sont négligeables, la raideur de ce dernier est k. Collé au plateau, le corps effectue des oscillations harmoniques suivant la verticale. Calculer l'amplitude des oscillations et l'énergie de ces dernières.

1.401. La masse du plateau du problème précédent est M. Amplitude des oscillations dans ce cas?

1.402. Une particule de masse m se déplace dans le plan xy sous l'action d'une force dépendant de la vitesse selon la loi $\mathbf{F} = a(\dot{y}\mathbf{i} - \dot{x}\mathbf{j})$, où a est une constante positive, $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ sont les vecteurs unités des axes x et y. A l'instant initial $t = 0$, la particule

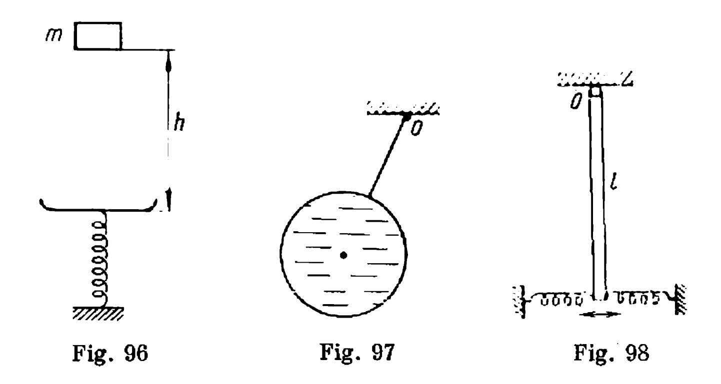


Fig. 96 Fig. 97 Fig. 98

se trouvait au point $x = y = 0$, animée d'une vitesse $\mathbf{v}_0$ dans le sens du vecteur unité $\mathbf{j}$. Etablir la loi du mouvement de la particule $x(t)$, $y(t)$ et sa trajectoire.

1.403. Un pendule est constitué par un récipient sphérique à parois minces de rayon R, rempli d'eau. Le récipient est fixé à une tige rigide légère (fig. 97). La distance du point de suspension O au centre du récipient est égale à l. De combien de fois changera la période des petites oscillations d'un tel pendule une fois l'eau gelée? On néglige la viscosité de l'eau ainsi que la variation du volume lors de la solidification.

1.404. Calculer la pulsation des petites oscillations d'une mince tige homogène de masse m et de longueur l articulée verticalement au point O (fig. 98). La raideur totale des ressorts est k. Les masses des ressorts sont négligeables.

1.405. Une barre homogène de masse $m = 1{,}5$ kg suspendue à deux fils identiques de longueur $l = 90$ cm (fig. 99) est tournée d'un petit angle autour d'un axe fixe passant par son milieu C. Les fils s'écartent alors d'un angle $\alpha = 5{,}0°$. On abandonne ensuite la barre à elle-même et elle se met à effectuer des petites oscillations. Déterminer:

a) la période;

b) l'énergie mécanique totale des oscillations de la barre.

1.406. Un système (fig. 100) est constitué par un disque homogène horizontal D de masse m et de rayon R et par une barre mince AO dont le coefficient de torsion est k. Déterminer l'amplitude des

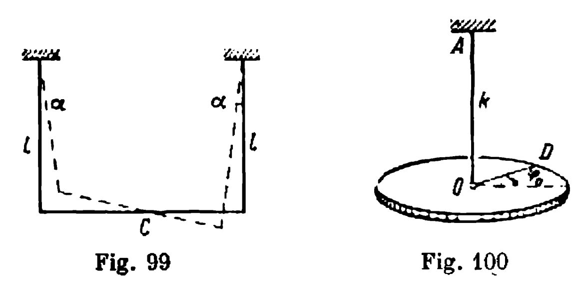


Fig. 99 Fig. 100

petites oscillations de torsion et leur énergie si à l'instant initial le disque était écarté de la position d'équilibre d'un angle φ_0 et était lancé à une vitesse angulaire $\dot{\varphi}_0$.

1.407. Une barre homogène de masse m et de longueur l effectue des petites oscillations autour d'un axe horizontal passant par son extrémité supérieure. Déterminer l'énergie cinétique moyenne de la barre pendant une période si à l'instant initial elle était écartée de la verticale d'un angle ϑ_0 et était lancée à une vitesse angulaire $\dot{\vartheta}_0$.

1.408. Un pendule composé est installé de telle manière que son centre d'inertie se situe au-dessus du point de suspension. A partir de cette position le pendule se met en mouvement vers la position d'équilibre stable par laquelle il passe avec la vitesse angulaire ω. En négligeant le frottement, déterminer la période des petites oscillations de ce pendule.

1.409. Un pendule composé effectue des petites oscillations autour d'un axe horizontal à la pulsation $\omega_1 = 15{,}0$ rd/s. Si on lui accroche un petit corps de masse $m = 50$ g à la distance $l = 20$ cm au-dessous de l'axe, la pulsation devient $\omega_2 = 10{,}0$ rd/s. Calculer le moment d'inertie de ce pendule pesant par rapport à l'axe d'oscillation.

1.410. Deux pendules composés effectuent des petites oscillations autour d'un même axe horizontal avec les pulsations ω_1 et ω_2. Leurs moments d'inertie par rapport à l'axe donné sont respectivement I_1 et I_2. Les pendules ramenés à la position d'équilibre sont attachés l'un à l'autre. Pulsation des petites oscillations du pendule composé?

1.411. Une barre homogène de masse m et de longueur l exécute des petites oscillations autour d'un axe horizontal OO' perpendiculaire à la barre et passant par l'un de ses points. Déterminer la distance entre le centre d'inertie de la barre et l'axe OO' telle que la période des petites oscillations soit minimale. Calculer cette période.

1.412. Une mince plaque homogène en forme d'un triangle équilatéral de hauteur h effectue des petites oscillations autour d'un axe horizontal passant par l'un de ses côtés. En négligeant le frottement et la résistance de l'air, déterminer la période de ces oscillations. Quelle est la longueur du pendule simple synchrone?

1.413. Un disque horizontal lisse tourne autour d'un axe vertical O (fig. 101) à la vitesse angulaire constante ω. Il porte une mince barre homogène AB de longueur l effectuant des petites oscillations autour du point A articulé sur le disque à la distance a du point O. Calculer la pulsation de ces oscillations.

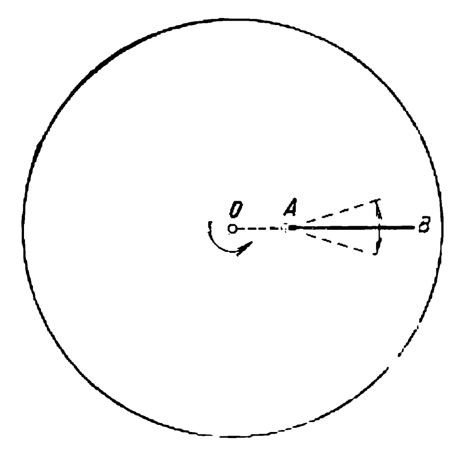


Fig. 101

1.414. Calculer la pulsation des petites oscillations du système représenté fig. 102. Le rayon de la poulie est R, son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation I, la masse du corps m, la raideur du ressort k. Les masses du fil et du ressort sont négligeables ainsi que le frottement dans l'axe de la poulie. Le fil passe sur la poulie sans glisser.

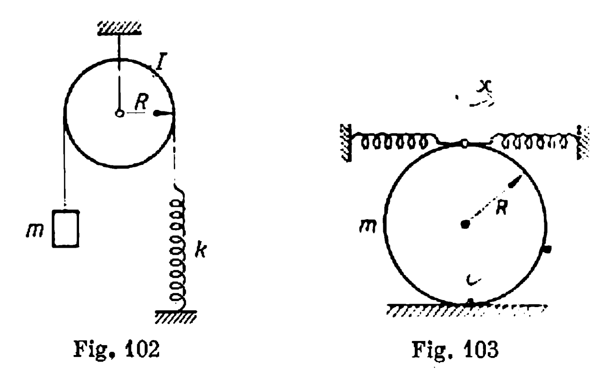


Fig. 102

Fig. 103

1.415. Un cylindre plein homogène de rayon r roule sans glisser sur la face intérieure d'une surface cylindrique de rayon R en effectuant des petites oscillations harmoniques. La période de ces oscillations?

1.416. Un cylindre plein homogène de masse m exécute des petites oscillations sous l'action de deux ressorts dont la raideur totale est égale à k (fig. 103). Déterminer la période des oscillations si le cylindre roule sans glisser sur le plan support.

1.417. Deux sphères de masses $m_1 = 1{,}0$ kg et $m_2 = 2{,}0$ kg glissent librement sur une mince barre lisse horizontale (fig. 104). Les sphères sont reliées par un ressort de raideur $k = 24$ N/m. La

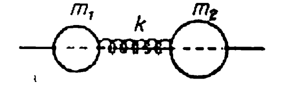


Fig. 104

masse du ressort est négligeable. On communique à la sphère gauche une vitesse initiale $v_1 = 12$ cm/s. Calculer :

a) la pulsation des oscillations du système au cours du mouvement ;

b) l'énergie et l'amplitude des oscillations.

1.418. Déterminer la période des oscillations de torsion d'un système composé de deux disques attachés à une barre mince de coefficient de torsion k. Les moments d'inertie des disques par rapport à l'axe de la barre sont I_1 et I_2.

1.419. Un modèle de la molécule CO_2 est constitué par trois billes liées par des ressorts légers et disposées, en équilibre, en

Fig. 105

ligne droite. Un tel système peut effectuer les oscillations longitudinales de deux espèces comme c'est indiqué par les flèches à la fig. 105. En sachant les masses des atomes, déterminer le rapport des pulsations de ces oscillations.

1.420. Les oscillations amorties d'un point sont définies par $x = a_0 e^{-\beta t} \sin \omega t$, où a_0, β et ω sont des constantes positives. Déterminer :

a) l'amplitude des oscillations et la vitesse du point au moment $t = 0$;

b) les moments où le point atteint les positions extrêmes.

1.421. On a deux oscillations amorties dont on connaît les périodes T, les coefficients d'amortissement β et les décréments logarithmiques d'amortissement λ :

	T, s	β, s^{-1}	λ
1ère oscillation :	10^{-4}	10^2	10^{-2}
2e oscillation :	10^{-2}	10	10^{-1}

Laquelle des deux s'amortit plus rapidement?

1.422. Un pendule simple de longueur l effectue des petites oscillations à un coefficient d'amortissement β. Etablir l'équation horaire de ce pendule $\vartheta(t)$, où ϑ est l'angle d'écart de la position d'équilibre, étant donné qu'à la date $t = 0$ cet écart est ϑ_0 et la vitesse angulaire du pendule $\dot{\vartheta}_0$.

1.423. Un pendule simple oscille dans un milieu dont le décrément logarithmique d'amortissement est $\lambda_0 = 1{,}50$. Quel sera le décrément logarithmique d'amortissement λ si la résistance du milieu augmente de $n = 2{,}00$ fois? De combien doit-on augmenter la résistance du milieu pour que les oscillations deviennent impossibles?

1.424. Une particule écartée de sa position d'équilibre de $a = 1{,}0$ cm est ensuite abandonnée à elle-même. Quelle distance parcourra-t-elle au cours des oscillations jusqu'à l'arrêt complet si le décrément logarithmique d'amortissement est $\lambda = 0{,}020$?

1.425. Déterminer le décrément logarithmique d'amortissement d'un pendule simple de longueur $l = 50$ cm sachant que son énergie mécanique totale diminue de $n = 4{,}0 \cdot 10^4$ fois au bout de l'intervalle de temps $\tau = 5{,}0$ mn.

1.426. Un disque homogène de rayon $R = 13$ cm peut tourner autour d'un axe horizontal passant par son bord perpendiculairement à son plan. Déterminer la période des petites oscillations de ce disque dans le champ de pesanteur terrestre si le décrément logarithmique d'amortissement est $\lambda = 1{,}00$.

1.427. Un disque mince homogène de masse m et de rayon R suspendu horizontalement à un fil élastique effectue des oscillations de torsion au sein d'un liquide. Le couple de torsion appliqué par le fil est $N = \alpha\varphi$, où α est une constante, φ l'élongation angulaire. La force de résistance s'exerçant sur l'unité de surface du disque est $F_1 = \eta v$, où η est une constante, v, la vitesse de l'élément donné du disque par rapport au liquide. Pulsation des oscillations?

1.428. Un corps de masse $m = 0{,}50$ kg, reposant sur un plan horizontal de coefficient de frottement $k = 0{,}10$, est relié par un ressort horizontal non déformé à une paroi. La raideur du ressort est $\varkappa = 2{,}45$ N/cm, sa masse négligeable. On déplace le corps de sorte que le ressort s'allonge de $x_0 = 3{,}0$ cm puis relâche. Déterminer:

a) la période des oscillations du corps;

b) le nombre d'oscillations qu'effectuera le corps avant l'arrêt.

1.429. Une bille de masse m peut effectuer des oscillations harmoniques non amorties autour du point $x = 0$ à la pulsation propre ω_0. A l'instant $t = 0$, où la bille était en état d'équilibre, on lui applique une force perturbatrice $F = F_0 \cos \omega t$ coïncidant en direction avec l'axe des x. Etablir l'équation des oscillations forcées de la bille $x(t)$.

1.430. Une particule peut effectuer des oscillations harmoniques non amorties sous l'action d'une force de rappel de coefficient k.

Lorsque la particule est en état d'équilibre, on lui applique une force constante F qui agit τ secondes. Déterminer l'amplitude des oscillations de la particule dès que la force cesse d'agir. Tracer un diagramme approximatif des oscillations $x(t)$. Etudier les cas possibles.

1.431. Une bille de masse m suspendue à un ressort communique à ce dernier une élongation Δl. La bille effectue des oscillations forcées sous l'action d'une force extérieure verticale qui varie harmoniquement avec amplitude F_0. Le décrément logarithmique d'amortissement est λ. En négligeant la masse du ressort, déterminer la pulsation de la force perturbatrice telle que l'amplitude du déplacement de la bille soit maximale. Quelle est cette amplitude?

1.432. Les amplitudes des oscillations harmoniques forcées sont égales entre elles pour les pulsations $\omega_1 = 400$ rd/s et $\omega_2 = 600$ rd/s. Déterminer la pulsation telle que l'amplitude soit maximale.

1.433. Pour les pulsations ω_1 et ω_2 d'une force perturbatrice harmonique l'amplitude de la vitesse d'une particule vaut la moitié de la valeur maximale. Déterminer:

a) la pulsation correspondant à la résonance de vitesse;

b) le coefficient d'amortissement β et la pulsation des oscillations amorties de la particule.

1.434. Une certaine courbe de résonance décrit un système mécanique vibratoire au décrément logarithmique d'amortissement $\lambda = 1{,}60$. Déterminer, pour cette courbe, le rapport de l'amplitude maximale à l'amplitude pour une très faible pulsation.

1.435. Sous l'action d'une force extérieure verticale $F = F_0 \cos \omega t$ un corps suspendu à un ressort effectue des oscillations forcées stationnaires définies par $x = a \cos (\omega t - \alpha)$. Déterminer le travail de la force F pendant une période. Montrer que ce travail est accompli pour vaincre les forces de frottement.

1.436. Une bille de masse $m = 50{,}0$ g est accrochée à un ressort sans masse dont la raideur $k = 20{,}0$ N/m. La bille effectue des oscillations stationnaires d'amplitude $a = 1{,}3$ cm sous l'action d'une force perturbatrice verticale qui varie harmoniquement avec pulsation $\omega = 25{,}0$ rd/s. Les déplacements de la bille sont en retard de phase de $^3/_4\, \pi$ sur la force perturbatrice. Déterminer:

a) le décrément logarithmique d'amortissement;

b) le travail de la force perturbatrice pendant une période d'oscillation.

1.437. Une bille de masse m suspendue à un ressort de masse négligeable peut effectuer des oscillations verticales avec un décrément logarithmique d'amortissement β. La pulsation propre des oscillations est ω_0. Soumise à l'action d'une force extérieure verticale donnée par $F = F_0 \cos \omega t$, la bille effectue des oscillations harmoniques stationnaires. Déterminer:

a) la puissance moyenne $\langle P \rangle$ de la force F, mise en jeu en une période d'oscillation;

b) la pulsation ω de la force F pour laquelle $\langle P \rangle$ est maximale ; quelle est la valeur de $\langle P \rangle_{max}$?

1.438. Une bille suspendue à un ressort sans masse est soumise à l'action, dans la direction verticale, d'une force perturbatrice harmonique F dont la pulsation est variable et l'amplitude constante. Le coefficient d'amortissement est η fois plus petit que la pulsation propre ω_0 des oscillations de la bille. De combien de p. cent la puissance moyenne par période $\langle P \rangle$ de la force F pour la pulsation correspondant à la résonance de déplacement diffère-t-elle de la puissance moyenne maximale $\langle P \rangle_{max}$ de cette force?

Processus ondulatoires
Ondes sonores

1.439. Calculer le temps mis par les vibrations sonores pour parcourir la distance l entre les points A et B sachant que la température de l'air entre ces points varie linéairement de T_1 à T_2? La célérité du son dans un gaz est $v = \alpha \sqrt{T}$, où α est une constante.

1.440. L'équation d'une onde sonore plane progressive est de la forme

$$\xi = 60 \cos (1\,800\, t - 5{,}3\, x)\ \mu$$

(t en secondes, x en mètres). Déterminer :

a) le rapport de l'amplitude du déplacement des particules du milieu à la longueur d'onde ;

b) l'amplitude des oscillations de la vitesse des particules du milieu et son rapport à la vitesse de propagation de l'onde ;

c) l'amplitude des oscillations de la déformation relative du milieu et sa relation avec l'amplitude des oscillations de la vitesse des particules.

1.441. Une onde plane de la forme $\xi (x, t) = a \cos (\omega t - kx)$ se propage dans un milieu élastique homogène.

1) Tracer les graphiques des grandeurs ξ, $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ et $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ en fonction de x.

2) Indiquer l'orientation de la vitesse des particules du milieu aux points où $\xi = 0$ pour les cas des ondes longitudinale et transversale.

3) Tracer le graphique approximatif de la distribution de la densité du milieu $\rho (x)$ pour une onde longitudinale.

1.442. Une onde plane dont la forme est traduite par l'équation $\xi = ae^{-\gamma x} \cos (\omega t - kx)$, où a, γ, ω et k sont des constantes, se propage dans un milieu homogène. Calculer le déphasage des vibrations aux points où les amplitudes du déplacement des particules du milieu diffèrent l'une de l'autre de $\eta = 1{,}0$ % étant donné que $\gamma = 0{,}42$ m^{-1} et la longueur d'onde $\lambda = 50$ cm.

1.443. Une source ponctuelle isotrope émet des vibrations sonores de fréquence $\nu = 1{,}45$ kHz. A la distance $r_0 = 5{,}0$ m de la

source l'amplitude du déplacement des particules du milieu est $a_0 = 50\mu$ et au point A situé à $r = 10,0$ m de la source elle est $\eta = 3,0$ fois plus petite que a_0. Déterminer:

a) le coefficient d'amortissement de l'onde γ;

b) l'amplitude des oscillations de la vitesse des particules du milieu au point A.

1.444. Dans un milieu homogène élastique se propagent deux ondes planes, l'une le long de l'axe x, l'autre le long de l'axe y: $\xi_1 = a \cos(\omega t - kx)$, $\xi_2 = a \cos(\omega t - ky)$. Etablir la forme du mouvement des particules du milieu dans le plan xy étant donné que les deux ondes sont:

a) transversales, la direction des vibrations étant la même pour les deux ondes;

b) longitudinales.

1.445. Une onde harmonique plane, non amortie, se propage dans un milieu. Déterminer la densité volumique moyenne de l'énernie totale $\langle w \rangle$ si un sixième de la période des oscillations après le passage du maximum du déplacement en tout point du milieu la densité volumique d'énergie est w_0.

1.446. Une onde sonore cylindrique harmonique se propage dans un milieu homogène. Son coefficient d'amortissement est γ.

1) Ecrire l'équation de cette onde.

2) Déterminer le rapport des intensités du son aux distances $r_1 = 2,0$ m et $r_2 = 12,0$ m d'une source linéaire si $\gamma = 4,0 \cdot 10^{-2}$ m^{-1}.

1.447. Une source sonore ponctuelle isotrope est située sur la perpendiculaire au plan d'un anneau dressée en son centre O. La distance du point O à la source est $l = 1,00$ m, le rayon de l'anneau $R = 0,50$ m. Déterminer le flux d'énergie moyen à travers l'aire limitée par l'anneau, l'intensité du son au point O étant $I = 30$ μW/m^2. L'amortissement des ondes est insignifiant.

1.448. Une source ponctuelle isotrope, de puissance sonore $P = 0,10$ W, est située au centre d'un cylindre creux circulaire de rayon $R = 1,0$ m et de hauteur $h = 2,0$ m. En supposant que les parois du cylindre absorbent totalement le son, déterminer le flux d'énergie moyen incident à sa surface latérale.

1.449. Une onde stationnaire plane de la forme $\xi = a \cos kx \cdot \cos \omega t$ prend naissance dans un milieu homogène élastique. Tracer:

a) les graphiques des grandeurs ξ et $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ en fonction de x, aux moments $t = 0$ et $t = T/2$ où T est la période des oscillations;

b) les graphiques de la distribution de la densité de milieu $\rho(x)$ pour les oscillations longitudinales aux moments $t = 0$ et $t = T/2$;

c) le graphique de la distribution des vitesses des particules du milieu au moment $t = T/4$; indiquer à ce moment-là l'orientation des vitesses aux ventres pour les oscillations longitudinales et transversales.

1.450. Une onde stationnaire longitudinale de la forme $\xi = a \cos kx \cdot \cos \omega t$ apparaît au sein d'un milieu homogène de den-

sité ρ. Déduire les expressions de la densité volumique:

a) d'énergie potentielle $w_p(x, t)$;

b) d'énergie cinétique $w_c(x, t)$.

Tracer les graphiques de la distribution de la densité volumique d'énergie totale dans l'intervalle entre deux nœuds de déplacement aux moments $t = 0$ et $t = T/4$, où T est la période des oscillations.

1.451. Sur une corde de longueur 120 cm s'établit une onde stationnaire telle que les points dont l'amplitude de déplacement est égale à 3,5 mm sont distants de 15,0 cm. Déterminer l'amplitude de déplacement maximale. A quel harmonique correspondent ces oscillations?

1.452. On sait que la vitesse de propagation des ondes transversales le long d'une corde est $v = \sqrt{T/\rho}$ où T est la tension de la corde, ρ sa densité linéique. Déterminer:

a) le rapport des fréquences du son fondamental pour deux cordes identiques dont l'une est allongée de $\eta_1 = 2{,}0$ % et l'autre de $\eta_2 = 4{,}0$ % (par rapport à la longueur de la corde non tendue); la tension est supposée proportionnelle à l'élongation;

b) comment et de combien de fois se modifiera la fréquence du son fondamental de la corde tendue si on la raccourcit de 35 % et augmente sa tension de 70 %.

1.453. Pour mesurer la célérité du son dans l'air par la méthode de la résonance acoustique on utilise un tuyau, doté d'un piston, dont une extrémité est fermée par une membrane sonore. Calculer la célérité du son en sachant que la distance entre les positions consécutives du piston pour lesquelles on observe la résonance sur la fréquence $\nu = 2000$ Hz est $l = 8{,}5$ cm.

1.454. Soit un tuyau de longueur $l = 85$ cm. En posant la célérité du son $v = 340$ m/s, déterminer le nombre d'oscillations propres de la colonne d'air enfermé dans le tuyau, dont les fréquences sont inférieures à $\nu_0 = 1\,250$ Hz. Etudier deux cas:

a) le tuyau est fermé à une extrémité;

b) les deux extrémités du tuyau sont ouvertes.

On admet que les extrémités ouvertes présentent les ventres.

1.455. Une barre en cuivre longue de $l = 50$ cm est fixée en son milieu. Trouver le nombre d'oscillations propres de cette barre dans la bande de fréquences de 20 à 50 kHz. Leurs fréquences?

1.456. Une corde de masse m est fixée par deux extrémités. On y excite les oscillations du son fondamental dont la pulsation est ω et l'amplitude de déplacement maximale a_{max}. Déterminer:

a) l'énergie cinétique maximale de la corde;

b) l'énergie cinétique moyenne de la corde par période de vibration.

1.457. Une onde stationnaire de la forme $\xi = a \sin kx \cdot \cos \omega t$ apparaît dans une barre homogène dont la section est S et la densité ρ. Calculer l'énergie mécanique totale enfermée entre deux sections passant par les nœuds consécutifs.

1.458. Une source des vibrations sonores de fréquence $\nu_0 = 1000$ Hz se déplace suivant la normale au mur à la vitesse $u = 0{,}17$ m/s. Sur la même normale sont situés deux récepteurs immobiles R_1 et R_2, l'ordre de la disposition de ceux-ci et de la source S étant le suivant : R_1-S-R_2-mur. Lequel des récepteurs enregistrera les battements et quelle est la fréquence de ces derniers?

1.459. Un observateur immobile perçoit les vibrations sonores émises par deux diapasons dont l'un s'approche et l'autre s'en éloigne avec une même vitesse. L'observateur enregistre alors des battements de fréquence $\nu = 2{,}0$ Hz. Déterminer la vitesse des diapasons sachant que leur fréquence est $\nu_0 = 680$ Hz et que la célérité du son dans l'air est $v = 340$ m/s.

1.460. Un récepteur et une source de vibrations sonores de fréquence $\nu_0 = 2000$ Hz sont situés sur l'axe des x. La source effectue l'oscillation harmonique le long de cet axe avec une pulsation ω et une amplitude $a = 50$ cm. Pour quelle valeur de ω la largeur de la bande de fréquences perçue par le récepteur constituera $\Delta\nu = 200$ Hz? La célérité du son $v = 340$ m/s.

1.461. La source des vibrations sonores de fréquence $\nu_0 = 1700$ Hz et le récepteur se trouvent en un même point. Au moment $t = 0$, la source se met à s'éloigner du récepteur avec une accélération constante $w = 10{,}0$ m/s^2. En prenant la célérité du son égale à $v = 340$ m/s, calculer la fréquence des vibrations perçue par le récepteur immobile $t = 10{,}0$ s après le début du mouvement.

1.462. Une source sonore de fréquence propre $\nu_0 = 1{,}8$ kHz décrit une droite distante de $l = 250$ m d'un observateur immobile. La vitesse de la source constitue $\eta = 0{,}80$ de la célérité du son. Déterminer :

a) la fréquence du son perçue par l'observateur au moment où la source se trouvera en face de lui ;

b) la distance de la source à l'observateur au moment où la fréquence perçue sera $\nu = \nu_0$.

1.463. Sur une même normale au mur se situent une source des vibrations sonores de fréquence $\nu_0 = 1700$ Hz et un récepteur. La source et le récepteur sont immobiles alors que le mur s'éloigne de la source à la vitesse $u = 6{,}0$ cm/s. Déterminer la fréquence des battements enregistrés par le récepteur. La célérité du son est $v = 340$ m/s.

1.464. Déterminer le coefficient d'amortissement d'une onde sonore γ si aux distances $r_1 = 10$ m et $r_2 = 20$ m d'une source sonore isotrope les intensités de l'onde sonore se distinguent de $\eta = 4{,}5$ fois.

1.465. Une onde sonore plane se propage le long de l'axe des x. Le coefficient d'amortissement de l'onde $\gamma = 0{,}0230$ m^{-1}. Au point $x = 0$ l'intensité du son est $L = 60$ dB. Déterminer :

a) l'intensité du son au point de coordonnée $x = 50$ m ;

b) la coordonnée du point correspondant au seuil d'audibilité.

1.466. A la distance $r_0 = 20{,}0$ m d'une source sonore ponctuelle isotrope l'intensité du son est $L_0 = 30{,}0$ dB. En négligeant l'amortissement de l'onde sonore, déterminer :

a) l'intensité du son à la distance $r = 10{,}0$ m de la source;

b) la distance de la source à laquelle le son est inaudible.

1.467. Un observateur A situé à une certaine distance d'un diapason mis en vibration marque la disparition du son $\tau = 23$ s plus tôt qu'un observateur B se trouvant à une distance $n = 5{,}0$ fois plus petite du diapason. Déterminer le coefficient d'amortissement β des vibrations du diapason. L'amortissement des ondes sonores dans le milieu est négligeable.

1.468. Une onde longitudinale plane harmonique se propage dans un milieu de densité ρ. La célérité de l'onde est v. En supposant la variation de la densité du milieu $\Delta\rho \ll \rho$ montrer que :

a) l'accroissement de pression dans le milieu $\Delta p = -\rho v^2 (\partial\xi/\partial x)$ où $\partial\xi/\partial x$ est une déformation relative;

b) l'intensité de l'onde

$$I = (\Delta p)_m^2/2\rho v,$$

où $(\Delta p)_m$ est l'amplitude des oscillations de la pression.

1.469. Une onde plane sonore se propageant dans l'air rencontre une sphère de rayon $R = 50$ cm. La longueur d'onde est $\lambda = 20$ cm, la fréquence $\nu = 1700$ Hz, l'amplitude des oscillations de la pression dans l'air $(\Delta p)_m = 3{,}5$ Pa. Déterminer la valeur moyenne du flux d'énergie incidant sur la surface de la sphère.

1.470. Un point A est situé à la distance $r = 1{,}5$ m d'une source sonore ponctuelle isotrope dont la fréquence est $\nu = 600$ Hz. La puissance du son émis par la source $P = 0{,}80$ W. En négligeant l'amortissement des ondes et en supposant la célérité du son dans l'air $v = 340$ m/s, déterminer, pour le point A :

a) l'amplitude des oscillations de la pression $(\Delta p)_m$ et son rapport à la pression de l'air;

b) l'amplitude des vibrations a; comparer cette amplitude avec la longueur d'onde λ.

1.471. A la distance $r = 100$ m d'une source sonore ponctuelle isotrope de fréquence 200 Hz l'intensité du son est $L = 50$ dB. Le seuil d'audibilité pour cette fréquence correspond à l'intensité acoustique $I_0 = 0{,}10$ nW/m^2). Le coefficient d'amortissement de l'onde sonore est $\gamma = 5{,}0$ m^{-1}. Déterminer la puissance sonore de la source.

PARTIE 2

PHYSIQUE MOLÉCULAIRE ET THERMODYNAMIQUE

Equation d'état, énergie interne et capacité calorifique d'un gaz parfait*)

2.1. Calculer le nombre de molécules n dans 1 cm^3 et la densité ρ de l'azote à la pression 2,0 nPa et à la température 15 °C.

2.2. Un récipient de volume 0,250 m^3 contient un mélange de gaz carbonique et de vapeur d'eau. La température du mélange gazeux est 327 °C. Le nombre de molécules du gaz carbonique $N_1 = 6{,}60 \cdot 10^{21}$, celui de molécules de la vapeur d'eau $N_2 = 0{,}90 \cdot 10^{21}$. Calculer la pression p et la masse moléculaire relative M_r du mélange.

2.3. La densité d'un mélange gazeux composé d'hélium et d'argon sous la pression de 152 kPa et à la température 27 °C est égale à $\rho = 2{,}00$ kg/m^3. Nombre d'atomes d'hélium contenus dans 1 cm^3 du mélange gazeux?

2.4. Un faisceau de molécules incidant sur une paroi s'en réfléchit conformément à la loi du choc parfaitement élastique. Déterminer la pression p du faisceau sur la paroi en sachant que la vitesse des molécules fait un angle ϑ avec la normale à la paroi. On connaît également la masse m et la vitesse v des molécules ainsi que le nombre de molécules par unité de volume n. Etudier les cas:

a) la paroi est immobile;

b) la paroi se déplace suivant sa normale avec la vitesse u.

2.5. Calculer la vitesse quadratique moyenne $\langle v \rangle_q$ et l'énergie cinétique moyenne $\langle \varepsilon \rangle$ d'une molécule d'oxygène animée d'une translation à la température 20 °C.

2.6. Déterminer le quotient de la vitesse quadratique moyenne des molécules gazeuses par la vitesse de la propagation du son dans un gaz parfait à la même température. Le gaz est constitué par:

a) les molécules monoatomiques et b) les molécules rigides diatomiques.

2.7. En partant des hypothèses classiques calculer les énergies moyennes $\langle \varepsilon \rangle$ des mouvements de translation, de rotation et de

---

*) Dans cette partie sont admises les désignations suivantes: M_r pour la masse moléculaire relative, M pour la masse molaire (masse d'une mole de substance).

vibration d'une molécule diatomique élastique à la température 4 500 K.

2.8. En partant des hypothèses classiques calculer la vitesse angulaire de rotation d'une molécule d'oxygène à la température $t = 27$ °C.

2.9. Déterminer l'énergie E de l'agitation thermique des molécules NH_3 contenues dans une bouteille de volume 10,0 l sous pression 2,45 kPa. Quelle fraction de cette énergie constitue l'énergie de translation des molécules E_{transl} ? Les molécules sont supposées rigides.

2.10. Déterminer, pour une molécule N-atomique, le nombre de degrés de liberté de vibration n_{vibr} et l'énergie moyenne $\langle \varepsilon \rangle$ à la température T. Tous les degrés de liberté de la molécule (de translation, de vibration et de rotation) sont supposés excités.

2.11. Un gaz est chauffé à la température T telle que tous les degrés de liberté d'une molécule sont excités. Calculer la chaleur molaire du gaz C_V et $\gamma = C_p/C_V$. Effectuer les calculs pour les gaz composés des molécules:

a) N_2; b) CO_2 (molécule linéaire) et c) NH_3.

2.12. Un récipient thermiquement isolé avec de l'azote se meut à la vitesse $v = 86{,}0$ m/s. La température du gaz est 0 °C. Calculer l'énergie de translation moyenne des molécules gazeuses à l'instant où le récipient est stoppé.

2.13. On connaît les chaleurs spécifiques d'un gaz: $c_V = 649$ J/(kg·K) et $c_p = 912$ J/kg·K). Déterminer la masse moléculaire M_r du gaz et le nombre de degrés de liberté n de ses molécules.

2.14. Déterminer les chaleurs spécifiques c_V et c_p d'un gaz dont la proportion pondérale est 85 % de l'oxygène (O_2) et 15 % de l'ozone (O_3). Les molécules O_2 et O_3 sont supposées rigides.

2.15. Une bouteille de volume $V = 2{,}55$ l contient $m = 15{,}0$ mg d'hydrogène à 2700°C. A cette température, les molécules d'hydrogène deviennent élastiques, de plus une partie d'elles se décompose en atomes. Le taux de dissociation des molécules est $\alpha = 0{,}25$. Calculer la pression p et la chaleur spécifique c_V de l'hydrogène sous les conditions indiquées.

R e m a r q u e. On appelle taux de dissociation le rapport du nombre de molécules dissociées à leur nombre total.

2.16. Deux bouteilles isolantes communiquent par un petit tube muni d'un robinet. Les bouteilles contiennent des gaz distincts aux températures différentes. On connaît le nombre de moles z_1 et z_2 de chacun des gaz enfermés dans les bouteilles, les volumes de celles-ci V_1 et V_2, les températures des gaz T_1 et T_2 et les nombres de degrés de liberté n_1 et n_2 des molécules gazeuses. (Les molécules sont supposées rigides.) On ouvre le robinet et l'on obtient le mélange

de gaz. Déterminer la température T et la pression p du mélange gazeux.

2.17. Etablir la loi régissant, en fonction du temps de pompage, la pression p de l'air dans une bouteille où l'on fait le vide. Le volume de la bouteille est V, la pression initiale p_0. La température reste pratiquement invariable lors du pompage. Le débit de la pompe est C. On admet que C ne dépend pas de la pression et que la conduite reliant la bouteille à la pompe n'influe pas sur la vitesse d'évacuation du gaz de la bouteille.

R e m a r q u e. Le débit de la pompe $C = dV/dt$ est le volume de gaz évacué par unité de temps; ce volume est mesuré à la pression d'admission du gaz dans la pompe.

2.18. On fait le vide dans une chambre de volume 1,74 m^3 à l'aide d'une pompe à diffusion dont le débit est 100 l/s (voir la remarque du problème 2.17). Calculer le temps au bout duquel la pression tombera de 1,5 Pa à 1,5 mPa.

2.19. Calculer le temps τ nécessaire pour que une pompe à vide évacue un volume $V = 64$ l à partir de la pression atmosphérique $p_0 = 100$ kPa jusqu'à la pression $p = 1{,}0$ Pa. Le débit de la pompe est $C = 50$ l/mn (voir la remarque du problème 2.17). La pompe assure le vide limite $p_{\text{lim}} = 0{,}5$ Pa.

2.20. Une chambre de volume $V = 1{,}50$ m^3 est reliée à la pompe à diffusion par l'intermédiaire d'une conduite de vide dont le rayon est $r = 25{,}0$ mm et la longueur $l = 50$ cm. Le débit de la pompe est $C = 50$ l/s (voir la remarque du problème 2.17). La température de l'air est 17 °C. Calculer:

a) la rapidité d'évacuation $C' = dV'/dt$ (où dV'/dt est le volume de gaz passant par la conduite en une seconde et mesuré à la pression p dans la chambre évacuée);

b) le temps τ au bout duquel la pression dans la chambre tombera de $p_0 = 1{,}0$ Pa à $p = 1{,}0$ mPa;

c) de combien de fois diminue le temps d'évacuation si l'on augmente le diamètre de la conduite de sorte que sa résistance devienne négligeable?

R e m a r q u e. Aux basses pressions, lorsque le libre parcours des molécules est de beaucoup supérieur au diamètre de la conduite ($\lambda \gg 2r$), la masse de gaz m passant par seconde à travers la conduite, dont les extrémités sont sous pressions p_1 et p_2, se calcule à l'aide de la formule de Knudsen:

$$m = \sqrt{M/RT}\,(p_1 - p_2)/W,$$

où

$$W = (3/4\sqrt{2\pi})\,(l/r^3)$$

est dit résistance de la conduite.

Distribution des molécules par vitesses et énergies. Lois de Maxwell et de Boltzmann *)

2.21. Quelle fraction de molécules d'air à la température 17 °C possède des vitesses qui ne diffèrent pas plus de 0,50 m/s des vitesses suivantes :

a) $v = v_{prob}$; b) $v = 0{,}1\ v_{prob}$?

2.22. Déterminer, dans 1 cm³, le nombre de molécules d'hélium dont les vitesses sont contenues dans l'intervalle de 2,39 km/s à 2,41 km/s. La température de l'hélium est 690 °C, sa densité $2{,}16 \cdot 10^{-4}$ kg/m³.

2.23. Un ballon de volume 10,5 l contient de l'hydrogène. A la température 0 °C, la pression de l'hydrogène est 100 kPa. Déterminer le nombre de molécules d'hydrogène dont les vitesses sont incluses dans l'intervalle de 1,19 km/s à 1,21 km/s à :

a) 0 °C ; b) 3 000 K.

2.24. Déterminer le nombre relatif de molécules d'un gaz dont les vitesses ne diffèrent pas plus de 0,5 % :

a) de la vitesse la plus probable ;

b) de la vitesse moyenne ;

c) de la vitesse quadratique moyenne.

2.25. Déterminer le rapport du nombre de molécules d'un gaz, dont les vitesses sont contenues dans l'intervalle de v à $v + \Delta v$ à la température T_1, au nombre de molécules, dont les vitesses sont dans le même intervalle à la température $T_2 = 2T_1$. Etudier les cas :

a) $v = {}^1/_2\ v_{prob1}$; b) $v = v_{prob1}$; c) $v = 2\ v_{prob2}$, où v_{prob1} et v_{prob2} sont les vitesses les plus probables des molécules correspondant aux températures T_1 et T_2 (on suppose que dans tous les cas $\Delta v \ll v$).

2.26. Pour quelle valeur de la vitesse v les courbes de distribution de Maxwell pour les températures T_1 et $T_2 = 2T_1$ se rencontrent-elles ?

2.27. Quelle fraction de molécules d'un gaz possède une énergie cinétique de translation ne différant pas plus de 1 % de l'énergie cinétique moyenne de translation des molécules ?

2.28. Calculer le nombre de chocs ν produits par les molécules gazeuses sur une aire unité par unité de temps. Le nombre de molécules de gaz par unité de volume est n, la température de gaz T, la masse d'une molécule m. Le gaz suit la distribution de Maxwell.

I n d i c a t i o n. Le nombre de molécules dont les composantes de la vitesse sont contenues dans l'intervalle v_x, $v_x + dv_x$ (les deux

*) En abordant les problèmes sur la loi de la distribution des molécules par vitesses il est commode de présenter la loi de Maxwell sous la forme

$$dN_x = (4/\sqrt{\pi})\, N e^{-x^2} x^2\, dx,$$

où $x = v/v_{prob}$ (v_{prob} est la vitesse la plus probable à la température donnée).

autres composantes v_y et v_z étant arbitraires) est donné par:

$$dn = (m/2\pi kT)^{1/2}\, ne^{-mv_x^2/2kT} dv_x.$$

2.29. Calculer la valeur moyenne de la composante de la vitesse $\langle v_x \rangle$ et la valeur moyenne du module de la composante de la vitesse $\langle |v_x| \rangle$ des molécules d'un gaz qui suit la distribution de Maxwell. La masse d'une molécule est m, la température du gaz T.

2.30. Calculer la pression de l'air:

a) à l'altitude de 10 km;

b) dans un puits, à la profondeur de 10 km.

A la surface de la Terre la pression est 100 kPa et la température de l'air 0 °C. On suppose que la masse molaire et la température de l'air ne dépendent pas de la hauteur.

2.31. A quelle altitude h au-dessus du niveau de la mer la densité d'air diminue:

a) de deux fois; b) de e fois?

La température de l'air 0 °C. On suppose indépendantes de h la température de l'air T, la masse molaire M et l'accélération de la pesanteur g.

2.32. A quelle altitude h la densité d'oxygène diminue-t-elle de 1 %? La température de l'oxygène est 27 °C.

2.33. Calculer la masse de gaz m enfermé dans un récipient cylindrique vertical. L'aire de la base du récipient est S, la hauteur h. La pression du gaz au niveau de la base inférieure est p_0, sa température T, la masse molaire M. T et g sont supposées indépendantes de h.

2.34. Montrer que le centre de gravité d'une colonne d'air verticale cylindrique est situé à la hauteur h_c à laquelle la densité de gaz diminue de e fois. On suppose indépendantes de h la température de l'air T, la masse molaire M et l'accélération de la pesanteur g.

2.35. Calculer la capacité calorifique de l'air contenu dans une colonne cylindrique verticale. L'aire de la base du cylindre est S, la pression au niveau de la base inférieure p_0. La masse molaire, la température de l'air et l'accélération de la pesanteur sont supposées indépendantes de la hauteur.

2.36. Un cylindre horizontal fermé à une extrémité est animé d'une rotation à la vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical passant par son extrémité ouverte. La longueur du cylindre est l, l'aire de sa base S, la pression de l'air en dehors du cylindre p_0, la température de l'air T, la masse d'une molécule d'air m. Déterminer:

a) la loi de la variation du nombre de molécules par unité de volume n à l'intérieur du cylindre en fonction de la distance r à l'axe de rotation;

b) la force f de la pression supplémentaire de l'air sur le fond du cylindre.

2.37. Calculer, en p. cent, la fraction de molécules de gaz se trouvant dans le champ de la pesanteur terrestre dont l'énergie

potentielle ε_p est supérieure à leur énergie cinétique moyenne de translation. La température du gaz et l'accélération de la pesanteur sont supposées indépendantes de l'altitude.

2.38. Quelle fraction de molécules de gaz possède une énergie cinétique suffisante pour vaincre le champ de gravitation de la Terre, la température du gaz étant 300 K? Faire les calculs pour les molécules a) de l'hydrogène? b) de l'azote.

2.39. La température d'un gaz varie en fonction de l'altitude h selon la loi $T = T_0 (1 - \beta h)$ où β est une constante. Déduire la loi de variation de la pression p et de la densité du gaz ρ en fonction de l'altitude. A $h = 0$ la pression du gaz est p_0. La masse molaire de gaz est M.

Phénomènes de transfert

2.40. Evaluer le libre parcours moyen λ et le temps τ entre deux collisions pour:

a) les molécules de l'hydrogène sous les conditions normales;

b) les protons des rayons cosmiques en Galaxie. On admet que la densité moyenne de gaz interstellaire constitue 10^4 particules/m^3. La vitesse des particules cosmiques est voisine de celle de la lumière. La masse du proton est pratiquement égale à celle de l'atome d'hydrogène. Le rayon du proton est $r \sim 10^{-13}$ cm.

2.41. Calculer le libre parcours moyen λ et le temps τ entre deux collisions des molécules d'oxygène sous la pression 0,2 mPa et à la température 17 °C.

2.42. Combien de collisions par seconde se produit-il entre les molécules dans 1 cm^3 d'hydrogène, la densité d'hydrogène étant $8{,}5 \cdot 10^{-2}$ kg/m^3 et la température 0 °C?

2.43. Un ballon de volume 2,53 l contient du gaz carbonique à la température de 127 °C et sous la pression de 15,0 kPa. Calculer le nombre de molécules N dans le ballon et le nombre de collisions entre les molécules par seconde z.

2.44. Calculer approximativement la pression au-dessous de laquelle le vide s'établit entre les parois d'un vase de Dewar. La distance entre les parois est 10 cm, la température 20 °C.

2.45. Déterminer, en fonction de la pression, le libre parcours moyen λ et le nombre de collisions par seconde z des molécules d'un gaz parfait, la masse du gaz étant constante, pour les transformations: a) isochore; b) isotherme; c) adiabatique. Le diamètre efficace des molécules est supposé constant.

2.46. Déterminer, en fonction de la température, le libre parcours moyen λ et le nombre de collisions par seconde z des molécules d'un gaz parfait, la masse du gaz étant constante, pour les transformations: a) isochore; b) isobare; c) adiabatique. Le diamètre efficace des molécules est supposé constant.

2.47. Etudier la propagation du son dans un gaz parfait du point de vue moléculaire cinétique. Répondre aux questions:

a) La célérité du son, peut-elle être supérieure à la vitesse quadratique moyenne des molécules de gaz ?

b) A quelle condition on peut considérer la propagation du son en tant que transformation adiabatique?

c) Quelle est la longueur des ondes sonores le plus fortement amorties dans un gaz parfait?

2.48. Quelle fraction de toutes les molécules d'air à la température 0 °C et sous la pression 2,4 Pa parcourt le chemin de 10 mm sans choc?

2.49. Deux vases sont séparés l'un de l'autre par une paroi mince munie d'un petit orifice initialement fermé. L'un des vases contient du gaz. L'autre est pompé de manière continue de sorte que la pression y est pratiquement nulle. Les dimensions linéaires de l'orifice sont inférieures au libre parcours moyen des molécules de gaz enfermé dans le premier vase. Le volume du vase contenant du gaz est V, la température du gaz est maintenue constante, égale à T, la masse molaire du gaz M, l'aire de l'orifice S. Au bout de combien de temps après l'ouverture de l'orifice la pression dans le vase qui contient du gaz diminuera-t-elle de moitié?

2.50. Evaluer le libre parcours moyen λ et le coefficient de diffusion D des ions dans un plasma d'hydrogène. La température du plasma est 10^7 K, le nombre d'ions par 1 cm^3 de plasma 10^{15}. A la température indiquée la section efficace d'ion d'hydrogène est posée $4 \cdot 10^{-20}$ cm^2.

2.51. Le coefficient de conductibilité thermique de l'oxygène à la température de 100 °C est égal à $3{,}25 \cdot 10^{-2}$ W/(m·K). Calculer le coefficient de viscosité de l'oxygène η à cette température.

2.52. On connaît le coefficient de viscosité du gaz carbonique η dans les conditions normales (voir les tableaux aux *Annexes*). Calculer le libre parcours moyen λ des molécules CO_2 et le coefficient de diffusion D dans les conditions normales.

2.53. Un gaz diatomique double son volume par transformation adiabatique. Déterminer la variation du coefficient de conductibilité thermique $\varkappa$ et du coefficient de diffusion D du gaz. Les molécules sont supposées rigides et le diamètre efficace des molécules constant.

2.54. A la suite d'une compression, la pression d'un gaz diatomique a augmenté de 10 fois. Déterminer la variation du libre parcours moyen des molécules λ et du coefficient de viscosité η. Envisager les cas des transformations:

a) isotherme; b) adiabatique.

Les molécules sont supposées rigides, leur diamètre efficace constant.

2.55. L'espace entre deux grandes armatures planes parallèles est rempli d'hélium. La distance des armatures est $l = 50$ mm. Une des armatures est maintenue à $t_1 = 20$ °C, l'autre à $t_2 = 40$ °C. Déterminer la densité de flux de chaleur q. Faire les calculs dans les cas où la pression du gaz est: a) $p = 100$ kPa; b) $p = 10$ mPa.

2.56. L'une des extrémités d'une barre enfermée dans une gaine athermane est en contact thermique avec un thermostat à tempéra-

ture T_1, l'autre extrémité en contact avec un thermostat à T_2 ($T_1 > T_2$). La barre comprend deux parties longues de l_1 et de l_2 dont les coefficients de conductibilité thermique sont $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$. Déterminer la densité de flux de chaleur q et le gradient de température dT/dx le long de chaque partie de la barre.

2.57. L'espace entre deux armatures planes parallèles est garni d'une substance dont le coefficient de conductibilité thermique varie en fonction de température comme $\varkappa = \varkappa_0/T$ où $\varkappa_0$ est une constante pour la substance donnée. Les armatures sont maintenues à températures constantes T_1 et T_2 ($T_1 > T_2$). La distance des armatures est l. Déterminer la densité de flux de chaleur q et la température de la substance en fonction de x, distance à partir de l'armature dont la température est T_1.

2.58. L'espace entre deux sphères concentriques est garni d'une substance isotrope homogène. Les rayons des sphères sont r_1 et r_2 ($r_2 > r_1$). La surface de la sphère intérieure est maintenue à la température T_1, celle de la sphère extérieure à la température T_2. On suppose connu le flux de chaleur à travers les surfaces des sphères. Déterminer le coefficient de conductibilité thermique de la substance entre les sphères, le gradient de température dT/dr et la température T dans l'interstice entre les sphères en fonction de r. Supposer $\varkappa$ indépendant de la température.

2.59. Un gaz parfait monoatomique remplit l'espace entre deux cylindres coaxiaux très longs. Le diamètre efficace des molécules du gaz est d, la masse d'une molécule m. Les rayons des cylindres sont respectivement r_1 et r_2 ($r_1 < r_2$). Le cylindre intérieur est maintenu à la température T_1, le cylindre extérieur à T_2. Calculer le flux de chaleur q par unité de longueur des cylindres. La convection du gaz n'a pas lieu, le libre parcours moyen des molécules gazeuses est bien inférieur à la distance entre les cylindres.

2.60. Un disque est suspendu au-dessus d'un disque identique qui peut tourner autour d'un axe vertical passant par son centre d'inertie. Déterminer le moment des forces de frottement N agissant sur le disque supérieur si le disque inférieur est animé d'une rotation à la vitesse angulaire ω. Sont connus: le rayon des disques a, la distance entre les disques d ($a \gg d$), coefficient de viscosité de l'air η.

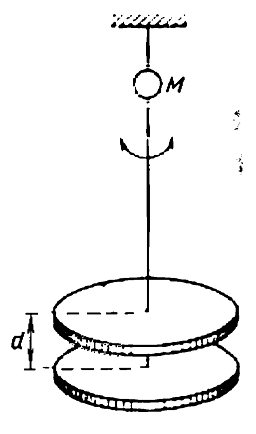


Fig. 106

2.61. La fig. 106 représente schématiquement un appareil destiné à mesurer le coefficient de viscosité d'un gaz η. Au-dessus d'un disque immobile est suspendu à un fil élastique fin un second disque. L'angle de rotation de ce disque est mesuré au miroir M. On trouve expérimentalement le décrément logarithmique d'amortissement Λ des

vibrations de torsion du disque dans un gaz étudié et la période des vibrations libres du disque dans le vide τ. En déduire la formule pour η. On suppose connus les rayons des disques a, la distance entre les disques d ($a \gg d$) et le moment d'inertie d'un disque I.

2.62. Un gaz remplit l'espace entre deux cylindres coaxiaux, très longs. Les rayons des cylindres sont r_1 et r_2 ($r_2 > r_1$). Le cylindre extérieur tourne à la vitesse angulaire constante ω_0, celui intérieur est immobile. Le moment des forces de frottement agissant sur l'unité de longueur du cylindre intérieur est N. Déterminer le coefficient de viscosité du gaz η et le gradient de vitesse angulaire $d\omega/dr$ en fonction de r.

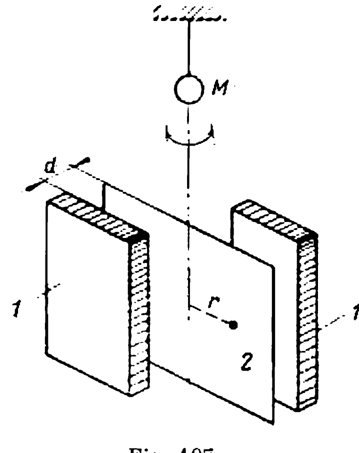


Fig. 107

2.63. La fig. 107 représente le schéma de principe d'un manomètre absolu de Knudsen destiné à mesurer les pressions des gaz raréfiés (dans l'intervalle de 1 Pa à 10 μPa).

Les deux plaques immobiles *1* sont portées à la température T_1. La plaque mobile *2* est suspendue à un fil élastique fin. La température T de la plaque *2* est la même que celle dans le manomètre ($T < T_1$). Les températures du gaz des deux côtés de la plaque *2* étant différentes, l'impulsion résultante communiquée par les molécules gazeuses qui frappent la surface des plaques n'est pas nulle de sorte que la plaque *2* est soumise à l'action des forces (effet radiométrique). Sollicitée par le moment de ces forces, la plaque *2* tourne d'un angle φ enregistré au miroir M. Déterminer, en fonction de la pression p, l'angle de torsion φ du système mobile du manomètre à condition que le libre parcours moyen $\lambda \gg d$.

Le coefficient de proportionnalité K entre le moment de torsion et l'angle de torsion φ se détermine en mesurant la période τ des oscillations de torsion libres du système. La période τ, le moment d'inertie du système mobile I et la longueur de la plaque *2* sont supposés connus.

Premier et deuxième principes de la thermodynamique en application à un gaz parfait

2.64. Un gaz parfait occupant à l'état initial un volume V_1 se dilate et son volume devient V_2. La dilatation est : 1) isobare ; 2) isotherme ; 3) adiabatique. Tracer les diagrammes p-V et U-V de ces transformations. Déduire de ces diagrammes :

a) dans quelle transformation le travail fourni par le gaz est minimal ;

b) le signe de l'accroissement de l'énergie interne ΔU pour chaque transformation.

2.65. Un récipient fermé de volume 2,50 l contient de l'hydrogène à 17 °C et sous la pression 15,0 kPa. On refroidit l'hydrogène jusqu'à la température 0 °C. Calculer :

a) la quantité de chaleur Q' cédée par le gaz ;

b) l'accroissement de l'énergie interne de l'hydrogène ΔU.

2.66. Une kilomole d'un gaz chauffée à pression constante de 17 °C à 75 °C absorbe 1,20 MJ de chaleur. Déterminer :

a) la valeur de $\gamma = C_p/C_V$;

b) l'accroissement de l'énergie interne du gaz ΔU ;

c) le travail du gaz A.

2.67. Un cylindre vertical, fermé par un piston de masse m et de section S, contient une kilomole d'un certain gaz. Initialement, la pression exercée par le gaz sur le piston est équilibrée par le poids du piston et par la pression atmosphérique p_0. On tire ensuite extérieurement le piston en le faisant sortir du cylindre de manière tellement lente que la température du gaz T dans le cylindre demeure pratiquement constante. Calculer le travail A' que l'on fournit :

a) pour soulever le piston à la hauteur h ;

b) pour doubler le volume du gaz.

Le piston glisse dans le cylindre sans frottement.

2.68. Un gaz parfait se dilate dans une transformation adiabatique, sa température variant de T_1 à T_2. Sont connues la masse de gaz m et sa chaleur spécifique c_V. Calculer le travail A fourni par le gaz lors de la dilatation.

2.69. Dans une transformation adiabatique, 1,00 kg d'oxygène subit une compression à la suite de laquelle sa température augmente de 20 °C à 100 °C. Tracer le diagramme de cette transformation dans les axes U, T. Calculer :

a) l'accroissement de l'énergie interne du gaz ΔU ;

b) le travail A' dépensé pour comprimer le gaz ;

c) de combien de fois diminuera le volume de gaz ?

2.70. Une quantité d'azote est comprimée jusqu'à un volume 10 fois plus petit que celui initial. Dans un cas la transformation est isotherme, dans l'autre adiabatique.

1) Dans quelle transformation le travail de compression est plus grand ? De combien de fois ?

2) Quelle transformation amène l'augmentation de l'énergie interne du gaz ? De combien de fois ?

2.71. Un cylindre fermé à deux extrémités est rempli de gaz parfait. Le volume du cylindre est divisé en deux parties égales par un piston très mobile. Le volume de chaque moitié du cylindre est V_0, la pression du gaz p_0, la masse du piston m, sa section S. On écarte légèrement le piston de sa position d'équilibre et ensuite on l'abandonne à lui-même. Il en résulte des oscillations dont la période τ est à déterminer. Supposer le volume et la pression du gaz reliés par

l'équation de la polytropique pV^n = const. Le piston glisse sans frottement sur les parois du cylindre.

2.72. Un piston peut glisser sans frottement dans un cylindre fermé à deux extrémités. Le cylindre et le piston sont imperméables à la chaleur. Primitivement, le piston divise le cylindre en deux parties égales, de volume V_0 chacune. Les deux compartiments du cylindre sont remplis de gaz parfait sous une pression p_0. Le rapport C_p/C_V est γ. On déplace très lentement le piston en comprimant le gaz dans une partie du cylindre. Déterminer le travail A' nécessaire pour en diminuer de moitié le volume initial.

2.73. Résoudre le problème précédent dans l'hypothèse que le piston est un conducteur de chaleur et que pendant son mouvement la température demeure constante dans les deux parties du cylindre.

2.74. Calculer la vitesse v de l'écoulement adiabatique de l'hélium d'un réservoir dans le vide par un petit orifice. La température de l'hélium dans le réservoir est $T = 1\,490$ K. La section de l'orifice est tellement petite que la vitesse du courant de gaz à l'intérieur du réservoir est négligeable.

2.75. Un gaz s'écoule adiabatiquement d'un réservoir à travers une conduite horizontale de petite section S. On maintient constantes la pression p_0 et la température T_0 dans le réservoir. La pression extérieure est p. Le gaz est supposé parfait. La section de la conduite est tellement petite qu'on peut négliger la vitesse du courant gazeux dans le réservoir.

1) Déterminer la vitesse de l'écoulement v et la quantité de gaz q s'écoulant par unité de temps.

2) Montrer que q est maximal lorsque la vitesse de l'écoulement est égale à la célérité du son dans le gaz à la température à la sortie de la conduite.

2.76. Une kilomole de gaz à la température $T_1 = 300$ K subit un refroidissement isochore de sorte que sa pression diminue de moitié. A la suite de la dilatation ultérieure, à pression constante, la température du gaz à l'état final égale celle initiale. Représenter la transformation sur le diagramme p-V. Calculer :

a) la quantité de chaleur Q gagnée par le gaz ;
b) le travail A que fournit le gaz ;
c) l'accroissement de l'énergie interne du gaz ΔU.

2.77. Une masse d'azote de 14 g subit une dilatation adiabatique, provoquant une diminution de pression de cinq fois, suivie d'une compression isotherme jusqu'à la pression initiale. Température initiale de l'azote est $T_1 = 420$ K. Tracer le diagramme p-V de la transformation. Trouver :

a) la température du gaz T_2 à la fin de la transformation ;
b) la quantité de chaleur Q' cédée par le gaz ;
c) l'accroissement de l'énergie interne du gaz ΔU ;
d) le travail A accompli par le gaz.

2.78. Un gaz occupant un volume de 0,390 m³ sous la pression 155 kPa se dilate, à température constante, jusqu'à un volume dix

fois plus grand. Ensuite on le chauffe à volume constant, sa pression à l'état final égalant celle initiale. Au cours de cette transformation le gaz reçoit 1,50 MJ de chaleur. Tracer le diagramme p-V de la transformation. Calculer la valeur de $\gamma = C_p/C_V$ pour ce gaz.

2.79. Déterminer la capacité calorifique molaire C d'un gaz parfait dans une transformation polytropique. L'indice de polytropique est n. Déterminer les valeurs de n telles que la capacité calorifique du gaz soit négative.

2.80. Pour quelles valeurs de l'indice de polytropique n la détente polytropique d'un gaz parfait s'accompagne:

a) d'absorption de la chaleur et d'échauffement du gaz ;

b) d'absorption de la chaleur et de refroidissement du gaz ;

c) de dégagement de la chaleur? Aux dépens de quelle source d'énergie le gaz effectue-t-il le travail dans ce cas?

2.81. Une certaine quantité de gaz parfait subit une dilatation représentée sur le diagramme p-V par une ligne droite passant par l'origine des coordonnées. On connaît : le volume initial du gaz V_0, sa pression initiale p_0 et le rapport $\gamma = C_p/C_V$. A la suite de la dilatation le volume du gaz a triplé. Déterminer :

a) l'indice de polytropique n ;

b) l'accroissement d'énergie interne du gaz ΔU ;

c) le travail A accompli par le gaz ;

d) la capacité calorifique molaire du gaz C au cours de cette transformation.

2.82. Une kilomole d'un gaz parfait monoatomique se dilate en suivant une polytropique d'indice $n = 1,5$, sa température diminuant de 1°. Calculer :

a) la capacité calorifique molaire C du gaz dans cette transformation ;

b) la quantité de chaleur Q reçue par le gaz ;

c) le travail A fourni par le gaz. Aux dépens de quelles sources d'énergie ce travail s'effectue-t-il?

2.83. 1,00 m³ d'air est comprimé de telle manière que son volume diminue de 5 fois et la pression augmente de dix fois. La pression initiale est 99 kPa. Le processus de compression étant supposé polytropique, calculer :

a) l'indice de polytropique n ;

b) l'accroissement de l'énergie interne ΔU du gaz ;

c) la quantité de chaleur Q gagnée par le gaz ;

d) le travail de compression A'.

2.84. La capacité calorifique molaire d'un gaz parfait varie lors d'une certaine transformation suivant la loi $C = \alpha/T$, où α est une constante. Déterminer :

a) le travail A produit par une kilomole de gaz lorsqu'on le chauffe de la température T_1 à la température $T_2 = 2T_1$;

b) l'équation reliant les paramètres p et V dans cette transformation.

2.85. Une kilomole d'oxygène effectue un cycle de Carnot dans l'intervalle des températures de 27 °C à 327 °C. On sait que le rapport de la pression maximale p_{max} atteinte au cours du cycle à la pression minimale p_{min} est égal à 20. Calculer:

a) le rendement du cycle η;

b) la quantité de chaleur Q_1 reçue pendant ce cycle;

c) la quantité de chaleur Q_2^1 cédée à la source froide au cours du cycle;

d) le travail A fourni par le gaz pendant le cycle.

2.86. Une machine frigorifique parfaite fonctionne suivant un cycle de Carnot inverse entre les températures —11 °C et 15 °C. Le travail fourni par la machine au cours d'un cycle $A = -200$ kJ. Calculer:

a) le rendement de la machine frigorifique ε;

b) la quantité de chaleur Q_2 extraite à la source froide pendant le cycle;

c) la quantité de chaleur Q'_1 cédée à la source chaude pendant le cycle.

Remarque. On appelle rendement d'une machine frigorifique ε le rapport de la quantité de chaleur Q_2 extraite à la source froide au travail fourni $A' = -A$.

2.87. Un cycle dans lequel l'hydrogène sert d'agent thermique se compose de deux isochores et de deux isobares. Calculer le travail A fourni par le gaz pendant un cycle et le rendement du cycle η sachant que, dans les limites d'un cycle, les valeurs maximales du volume et de la pression du gaz sont doubles des valeurs minimales, celles-ci étant $p_{min} = 100$ kPa et $V_{min} = 0{,}50$ m^3.

2.88. Calculer le rendement d'un cycle composé de deux isobares et de deux adiabatiques. L'agent thermique est l'azote. On sait qu'au bout d'un cycle le volume du gaz varie de dix fois, c'est-à-dire $V_{max}/V_{min} = 10$.

2.89. Un cycle effectué par deux kilomoles d'un gaz parfait monoatomique se compose d'une isotherme, d'une isobare et d'une isochore. La transformation isotherme se déroule à la température maximale du cycle $T = 400$ K. On sait également qu'au cours du cycle le volume du gaz varie de deux fois, c'est-à-dire $a = V_{max}/V_{min} = 2$.

1) Calculer le travail A accompli par le gaz au cours d'un cycle et le rendement du cycle η.

2) Comparer le rendement obtenu η avec celui du cycle de Carnot η_0 effectué entre les températures T_{min} et T_{max} du cycle considéré.

2.90. Une kilomole de gaz parfait effectue un cycle composé de l'alternance des isothermes et des adiabatiques (fig. 108). Chaque détente isotherme amène une augmentation de volume du gaz de k fois. Sachant que les transformations isothermes se produisent aux températures T_1, T_2 et T_3, calculer:

a) le rendement du cycle η;

b) le travail A du gaz pendant le cycle.

2.91. Déterminer les rendements des cycles suivants, en supposant que l'agent thermique est un gaz parfait à valeur connue de $\gamma = C_p/C_V$.

1) Le cycle comprend deux isobares et deux adiabatiques. On donne le rapport $b = p_{max}/p_{min}$ où p_{max} et p_{min} sont des pressions maximale et minimale du cycle.

2) Le cycle comprend deux isochores et deux isothermes. Sont connus: températures T_1 et T_2 des transformations isothermes ($T_2 > T_1$) et rapport $a = V_{max}/V_{min}$ où V_{max} et V_{min} sont les volumes maximal et minimal du cycle.

3) Le cycle comprend une isotherme, une adiabatique et une isobare. La transformation isotherme se produit à la température minimale du cycle. On connaît le rapport $b = p_{max}/p_{min}$ où p_{max} et p_{min} sont les pressions minimale et maximale du cycle.

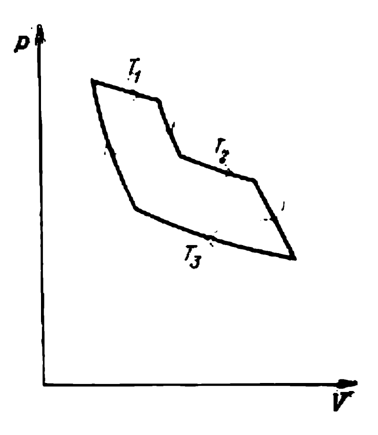


Fig. 108

2.92. Un cycle effectué par Z kilomoles de gaz parfait comprend deux adiabatiques, une isobare et une isochore (fig. 109). Au début de la compression adiabatique la température du gaz est T_1. Le degré de compression adiabatique est $a = V_1/V_2$, le degré de dilatation isobare $b = V_3/V_1$. Le rapport C_p/C_V est γ. Calculer la quantité de chaleur Q_1 reçue par le gaz pendant le cycle ainsi que le rendement du cycle η.

Fig. 109

2.93. Calculer l'accroissement de l'entropie ΔS d'une kilomole de gaz parfait triatomique au cours de l'échauffement de 0° à 500 °C si la transformation se produit:

a) à volume constant;

b) à pression constante.

On suppose rigides les molécules gazeuses.

2.94. Déterminer l'accroissement de l'entropie ΔS lors de la dilatation de 0,20 g d'hydrogène du volume 1,50 l au volume 4,50 l la transformation se produisant:

a) à pression constante;

b) à température constante.

2.95. La figure 110 représente deux transformations amenant un gaz parfait de l'état 1 en état 2. Montrer par le calcul que l'accroissement de l'entropie ΔS est le même dans les deux cas.

2.96. 2,00 kg d'oxygène occupent un volume de 1,50 m³ sous la pression 100 kPa. A la suite d'une dilatation le volume du gaz a augmenté de 2,5 fois, tandis que la pression a diminué de 3 fois,

Déterminer l'accroissement de l'énergie interne ΔU et de l'entropie ΔS du gaz.

2.97. Une kilomole de gaz parfait subit une transformation polytropique et sa température varie de T_1 à T_2. L'indice de polytropique est n. Déterminer l'accroissement de l'entropie du gaz ΔS.

2.98. La dilatation de deux kilomoles de gaz parfait monoatomique se déroule de la manière indiquée au problème 2.81. Déterminer l'accroissement de l'entropie ΔS lorsque le volume du gaz a doublé.

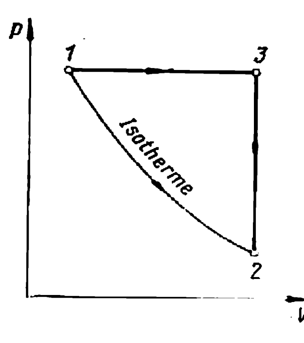


Fig. 110

2.99. Calculer l'accroissement de l'entropie ΔS dans les transformations traitées aux problèmes: a) 2.65; b) 2.76; c) 2.77.

2.100. Sur quels tronçons des cycles envisagés dans le problème 2.91 l'énergie interne et l'entropie augmentent? Représenter ces cycles sur le diagramme S-ln T.

2.101. Un vase de volume $V_1 = 1{,}60$ l contient $m_1 = 14{,}0$ mg d'azote, un autre, de volume $V_2 = 3{,}40$ l, contient $m_2 = 16{,}0$ mg d'oxygène. Les gaz sont à la même température. Les vases sont mis en communication et les gaz sont mélangés. Déterminer l'accroissement de l'entropie ΔS lors de cette transformation.

2.102. Un vase athermane est divisé en deux compartiments égaux par une paroi présentant un orifice, primitivement fermé. L'un des compartiments du vase contient du gaz parfait dont la masse est m. Dans l'autre compartiment on a fait un vide poussé. L'orifice s'ouvre et le gaz remplit tout le volume. Déterminer l'accroissement de l'énergie interne ΔU et de l'entropie ΔS du gaz.

Gaz réels*)

2.103. 0,840 kg d'azote occupe un volume de 33,0 l à la température de —100 °C. Calculer la pression p_1 exercée par le gaz sur les parois du récipient. Comparer p_1 avec la pression p_2 calculée à l'aide de l'équation d'état d'un gaz parfait.

2.104. Sur la fig. 111 est donnée une courbe représentant l'énergie potentielle ε_p d'interaction de deux molécules en fonction de la distance r entre leurs centres. L'énergie totale du système de deux molécules séparées l'une de l'autre par une grande distance (leur interaction est nulle) est traduite, sur le graphique, par le segment ε_0. Tracer en fonction de la distance r les graphiques de la projection de la force d'interaction des molécules f_r et de l'énergie cinétique ε_c.

*) Sauf mention contraire, dans tous les problèmes de ce paragraphe on entend sous le gaz réel le gaz qui suit l'équation de Van der Waals.

Parmi les fonctions envisagées indiquer celles qui s'annulent aux points *1*, *2*, et *3*. Indiquer, sur le graphique, la distance dont s'approchent les centres des molécules.

2.105. Déterminer le travail A accompli par une kilomole de gaz dans une dilatation isotherme. On connaît: température T_1, volumes initial V_1 et final V_2, constantes de Van der Waals a et b.

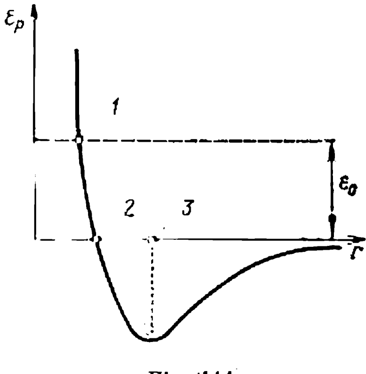


Fig. 111

2.106. Le volume d'une kilomole d'oxygène augmente, dans une dilatation isotherme, de 1,00 m³ à 5,0 m³. La transformation se passe à 27 °C. Calculer:

a) la quantité de chaleur reçue Q;

b) l'accroissement de l'énergie interne du gaz ΔU;

c) le travail A produit par le gaz.

2.107. Pour un gaz qui suit l'équation de Van der Waals, déterminer:

a) la capacité calorifique molaire à volume constant C_V;

b) l'équation de l'adiabatique;

c) la différence des capacités calorifiques molaires $C_p - C_V$. Valeur de cette différence au point critique?

2.108. Les paramètres critiques pour l'eau sont les suivantes: $T_{cr} = 547$ K, $p_{cr} = 21{,}8$ MPa.

1) Quel volume maximal peut occuper 1 kg d'eau à l'état liquide?

2) Quelle est la pression maximale de la vapeur saturante d'eau?

3) La vapeur d'eau peut-elle se condenser à la température 500 °C?

2.109. Calculer la température critique T_{cr} et la densité critique ρ_{cr} du gaz carbonique.

2.110. Un dispositif permettant de mettre en évidence l'état critique d'une substance représente une ampoule close contenant une quantité de liquide étudié pour laquelle le volume d'ampoule est critique. A mesure qu'on chauffe l'ampoule le liquide passe par une suite d'états dont l'un est critique.

1) Calculer la quantité d'éther nécessaire pour obtenir son état critique dans une ampoule de volume $V = 28{,}5$ cm³. Pour l'éther: $T_{cr} = 467$ K, $p_{cr} = 3{,}59$ MPa, $M = 74$ kg/kmole.

2) Tracer, sur le diagramme T-V, le domaine de l'état diphasé liquide-vapeur et étudier l'allure de la transformation lorsque l'ampoule est chauffée de $T_1 < T_{cr}$ à $T_2 > T_{cr}$ dans les cas où le volume de l'ampoule est:

a) inférieur au volume critique; b) critique; c) supérieur au volume critique.

2.111. A la température T_1, le volume d'une substance à l'état de vapeur saturante est n fois supérieur à celui à l'état liquide sous la même pression. Une certaine quantité de cette substance prise à l'état de vapeur saturante est comprimée à température constante T_1 du volume V_g au volume V, k fois plus petit ($n > k$). Quelle partie du volume final V occupe la phase liquide de la substance? Etudier le cas particulier où le volume V correspond au milieu du palier horizontal de l'isotherme.

2.112. Deux ballons athermanes sont reliés par un robinet. L'un d'eux, de volume V_1, contient une kilomole de gaz. Dans le second ballon de volume V_2, on a fait un vide poussé. Le robinet s'ouvre et le gaz se dilate adiabatiquement. Calculer:

a) l'accroissement de l'énergie interne du gaz ΔU;

b) le travail A accompli par le gaz contre les forces d'attraction intermoléculaires;

c) l'accroissement de la température du gaz ΔT.

On connaît la constante de Van der Waals a et la capacité calorifique molaire C_V du gaz.

2.113. La dilatation adiabatique dans le vide de 4,4 g de gaz carbonique fait diminuer leur température de 0,26 °C. Calculer le travail effectué par le gaz contre les forces d'attraction intermoléculaires.

2.114. L'équation d'état d'un gaz réel proposée par Clausius a la forme

$$\left[p+\frac{a}{T(V+c)^2}\right](V-b)=RT,$$

où V est le volume d'une kilomole de substance, a, b, c sont des constantes. Exprimer ces constantes à l'aide des paramètres p_{cr}, T_{cr}, V_{cr} au point critique.

2.115. Montrer que dans une expérience de Joule-Thomson l'effet est toujours négatif ($\Delta T > 0$) aux cas suivants:

a) la température initiale du gaz $T_1 > 6{,}75 T_{cr}$;

b) le gaz à étrangler est tel que l'on peut négliger les forces d'attraction mutuelle entre les molécules.

2.116. Déterminer le signe de l'accroissement de l'énergie interne ΔU du gaz dans une expérience de Joule-Thomson telle que l'état initial du gaz est figuré par un point situé:

a) sur la courbe d'inversion; b) au-dessus de cette courbe.

2.117. Déterminer l'accroissement de l'entropie ΔS d'une kilomole de gaz au cours d'une dilatation isotherme de V_1 à V_2. On admet que la correction de Van der Waals b est connue.

2.118. Montrer que la position de la ligne droite *1-2* correspondant à la transition de phase isotherme-isobare sur la courbe de Van der Waals (fig. 112) est telle que les aires *I* et *II* sont égales.

2.119. Déterminer le signe de l'accroissement de l'entropie ΔS dans l' effet de Joule-Thomson.

Liquides. Capillarité

2.120. Un capillaire vertical de rayon r est immergé par son extrémité dans un liquide mouillant (fig. 113). Etablir, en fonction de la hauteur z, la loi de la variation de la pression p dans le capillaire.

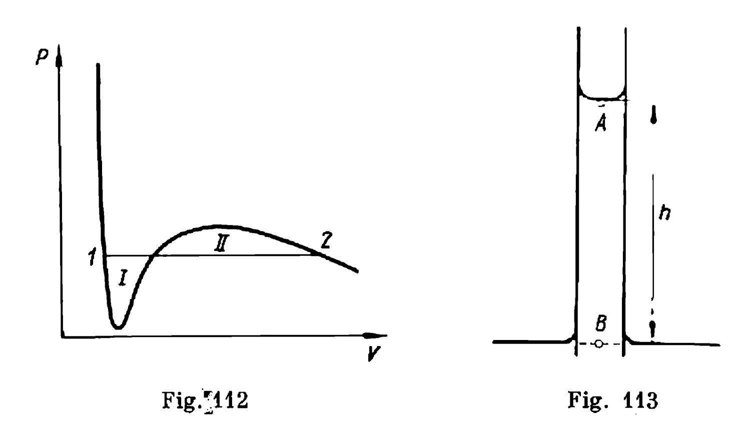


Fig. 112   Fig. 113

Déterminer les pressions aux points A et B. Le coefficient de tension superficielle, l'angle de raccordement et la pression atmosphérique sont respectivement α, ϑ et p_0.

2.121. Les branches d'un tube en U disposé verticalement représentent des capillaires de rayons $r_1 = 0{,}25$ mm et $r_2 = 0{,}50$ mm. Le tube est rempli de mercure, la hauteur de la colonne de mercure dans la branche large étant de 23 cm. Calculer la différence Δh des niveaux du mercure dans les branches du tube et la pression maximale du mercure p sur les parois du tube. L'angle de raccordement est $\vartheta = 138°$, la pression atmosphérique 100 kPa.

2.122. Un capillaire vertical à l'extrémité supérieure fermée est plongé dans une large cuve à glycérine de manière que la moitié de sa longueur se trouve immergée dans la glycérine. Pour quel rayon du capillaire la glycérine s'élève à une hauteur égale : a) à zéro ; b) à $l/4$? Longueur du capillaire $l = 30{,}0$ cm, pression atmosphérique $p_0 = 101$ kPa. L'angle de raccordement est supposé nul.

2.123. Quelle est la pression dans les bulles d'air qui se forment à la profondeur de 3,50 m ? Le diamètre des bulles est 3,66μ. La pression atmosphérique est 101 kPa.

2.124. A quelle profondeur h dans l'eau se forment les bulles gazeuses si en montant à la surface elles voient leur rayon augmenter de $n = 1{,}1$ fois ? A la surface de l'eau le rayon des bulles est $r = 1{,}53\mu$, la pression atmosphérique $p_0 = 100$ kPa.

2.125. Le rayon d'une bulle de savon est $r = 6{,}0$ mm ; la tension superficielle de l'eau savonneuse $\alpha = 4{,}3 \cdot 10^{-2}$ N/m. Calculer :

a) la surpession Δp de l'air à l'intérieur de la bulle ;

b) l'énergie libre F de la surface de la bulle de savon;

c) le travail A nécessaire pour gonfler cette bulle. On suppose isotherme le processus de la formation de la bulle de savon.

2.126. Deux lames de verre verticales parallèles sont partiellement immergées dans l'alcool. La distance entre les lames est $d = 0{,}20$ mm, leur largeur $l = 19{,}0$ cm. Calculer la hauteur h d'ascension de l'alcool entre les lames et la force f d'attraction s'exerçant entre elles. On suppose que le mouillage est parfait et que l'alcool entre les lames n'atteint pas les bords supérieurs de ces dernières.

2.127. Deux lames verticales partiellement immergées dans un liquide qui les mouille s'attirent-elles ou se repoussent-elles? Quelle est la force appliquée aux lames? Sont connus: densité du liquide ρ, coefficient de tension superficielle α, largeur des lames l, distance entre les lames d et l'angle de raccordement ϑ.

2.128. Une grande goutte de mercure se trouve entre deux lames de verre horizontales. Sous l'action de la pesanteur la goutte acquiert la forme d'une galette de rayon $r = 2{,}28$ cm et d'épaisseur $d = 0{,}38$ cm. Quelle charge faut-il mettre sur la lame supérieure pour que la distance entre les lames diminue de $n = 10$ fois? L'angle de raccordement ϑ est égal à 135°.

2.129. Deux lames de verre sont mouillées d'eau et ensuite collées. L'épaisseur de la couche d'eau entre les lames est de $1{,}50\mu$, les dimensions de la lame sont 5×15 cm. Calculer la force f qu'il faut appliquer perpendiculairement aux lames pour les séparer l'une de l'autre. L'angle de raccordement $\vartheta = 0°$. On tient compte de ce que les dimensions linéaires des lames sont bien supérieures à leur distance.

2.130. Deux lames verticales sont placées de manière à former un coin de petit angle φ. Les lames sont mises dans un liquide mouillant. Etablir l'équation de la courbe d'intersection de la surface du liquide avec une lame. Sont connus: densité du liquide ρ, coefficient de tension superficielle α, angle de raccordement ϑ.

2.131. Calculer l'accroissement de l'énergie libre ΔF de la couche superficielle au cours de la fusion de deux gouttes de mercure identiques en une seule. Le processus est supposé isotherme. Le rayon des gouttes avant la fusion est $r = 2{,}5$ mm.

2.132. Sur un cadre rectangulaire avec un côté coulissant est tendue une pellicule d'eau savonneuse. On déplace très lentement le côté mobile de manière à augmenter l'aire du cadre de $\Delta\sigma = 2{,}0$ cm². La traction de la pellicule se produit à la température $t = 27$ °C. Le coefficient de tension superficielle de l'eau savonneuse est $\alpha = 4{,}0 \cdot 10^{-2}$ N/m, le coefficient thermique $d\alpha/dT = -1{,}5 \cdot 10^{-4}$ N/(m·K). Calculer l'accroissement de l'énergie libre ΔF, de l'entropie ΔS et de l'énergie interne ΔU de la couche superficielle de la pellicule.

2.133. Calculer l'accroissement de l'entropie au cours des processus suivants:

1) Une kilomole d'eau se transforme en vapeur. La température de l'eau et de la vapeur est 100 °C.

2) 1,00 kg de glace se transforme, par échauffement, en eau et ensuite en vapeur. La température de la glace est 0 °C, la température de la vapeur 100 °C. La transformation se déroule à la pression 101 kPa. La capacité calorifique de l'eau est supposée indépendante de la température.

3) Dans un calorimètre de capacité calorifique négligeable on mélange 500 g d'eau à 0 °C et 400 g de glycérine à 27 °C.

2.134. En se servant de l'équation de Clapeyron-Clausius établir, en fonction de la température T, la pression de la vapeur saturante p_s pour les températures sensiblement inférieures à celle critique. La chaleur spécifique de vaporisation λ est supposée indépendante de la température.

I n d i c a t i o n. Aux températures sensiblement inférieures à T_{cr} le volume spécifique de la vapeur saturante est bien supérieur au volume spécifique du liquide. Pour cette raison on peut admettre que l'équation d'état d'un gaz parfait est valable pour la vapeur saturante.

2.135. Pour le gaz carbonique, la variation de la pression de la vapeur saturante p_s en fonction de la température T au voisinage du point triple est décrite par l'équation empirique

$$\log p_s = a - b/T,$$

où p_s est en kPa ; $a = 11{,}05$; $b = 1{,}80 \cdot 10^3$ K pour la sublimation ; $a = 8{,}78$; $b = 1{,}31 \cdot 10^3$ K pour la vaporisation. En utilisant la réponse du problème précédent, calculer :

a) la température T_{tr} et la pression p_{tr} au point triple ;

b) les valeurs des chaleurs spécifiques de vaporisation λ_1, de sublimation λ_2 et de fusion λ_3 au voisinage du point triple.

2.136. Une chambre de Wilson est remplie de vapeur d'eau sursaturée à la suite d'une dilatation adiabatique. La température de la vapeur est -7 °C ; la pression de la vapeur est 1,12 fois plus grande que celle de la vapeur saturante p_s au-dessus de la surface plane de l'eau à la même température. Quel est le rayon d'équilibre r des gouttes d'eau se formant à la suite du passage des particules α à travers la chambre de Wilson? Qu'est-ce qui se passera avec les gouttes de plus petites dimensions?

I n d i c a t i o n. La pression de la vapeur saturante p_s au-dessus d'une surface courbe varie en fonction de son rayon de courbure r suivant la loi

$$p_s = p_{s0} e^{\pm(2M\alpha/\rho RT)(1/r)},$$

où p_{s0} est la pression de la vapeur saturante au-dessus de la surface plane du liquide, α, le coefficient de tension superficielle, ρ, la densité du liquide ; le signe moins est attribué à une surface concave, le signe plus à une surface convexe.

PARTIE 3

ÉLECTRICITÉ

Electrostatique

3.1. Comparer la force d'interaction électrostatique f_e entre deux électrons avec la force de leur interaction de gravitation f_g.

3.2. Quelle masse m'_p devrait posséder un proton pour que la force de répulsion électrostatique s'exerçant entre deux protons soit équilibrée par celle de leur attraction de gravitation?

3.3. Calculer l'accélération w qu'un électron communique à un autre, la distance des deux électrons étant $r = 1{,}00$ mm.

3.4. Calculer la force d'interaction f entre deux molécules d'eau distantes l'une de l'autre de $l = 10{,}0$ nm. Le moment dipolaire électrique d'une molécule d'eau est $p = 0{,}62 \cdot 10^{-29}$ C·m. On suppose que les moments dipolaires des molécules d'eau sont dirigés suivant une même droite.

3.5. On a deux systèmes de charges ponctuelles: $q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_{N_1}$ et $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k, \ldots, q'_{N_2}$ rigidement liées aux points de rayons vecteurs $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_{N_1}$ et $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \ldots, \mathbf{r}'_k, \ldots, \mathbf{r}'_{N_1}$. Calculer la force $\mathbf{f}$ appliquée au système de charges q_i de la part du système de charges q'_k. Poser $\varepsilon = 1$.

3.6. Une charge q est répartie dans un volume V avec une densité volumique $\rho = \rho(\mathbf{r})$. Une autre charge q' est répartie dans un volume V' avec une densité $\rho = \rho(\mathbf{r}')$. Ecrire l'expression de la force $\mathbf{f}$ qu'exerce la charge q' sur la charge q. Poser $\varepsilon = 1$.

3.7. Déterminer la force de répulsion f (par unité de longueur) de deux fils parallèles infinis chargés d'électricité de même signe. Les fils se trouvent dans le vide à la distance $b = 20{,}0$ mm l'un de l'autre, la densité linéaire des charges, la même pour les deux fils, est $\lambda = 3{,}00 \cdot 10^{-6}$ C/m. Quel travail A (par unité de longueur) faut-il fournir pour rapprocher ces fils à la distance $a = 10{,}0$ mm?

3.8. Les électrodes d'une diode sont constituées par un filament (cathode) de rayon $a = 0{,}100$ mm et par un cylindre coaxial (anode) de rayon $b = 2{,}72$ mm. On applique aux électrodes une tension $U = 100$ V. Calculer la valeur de la force f_e agissant sur un électron et de la force f_m agissant sur une molécule d'eau placés au point situé à la distance $r = 1{,}00$ mm de l'axe de la cathode. Le moment dipolaire d'une molécule d'eau est $p = 0{,}62 \cdot 10^{-29}$ C·m.

3.9. Aux sommets d'un hexagone régulier de côté a sont placées des charges ponctuelles de même valeur q. Déterminer le potentiel φ et l'intensité de champ E au centre de l'hexagone à condition que:

a) les charges sont de même signe;

b) les charges voisines sont de signe contraire.

3.10. N charges ponctuelles $q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_N$ sont placées dans le vide aux points de rayons vecteurs $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_i, \ldots \ldots, \mathbf{r}_N$. Donner les expressions du potentiel φ et de l'intensité du champ $\mathbf{E}$ au point défini par le rayon vecteur $\mathbf{r}$.

3.11. Une charge de densité $\rho = \rho(\mathbf{r})$ est répartie dans un domaine V. Donner les expressions du potentiel φ et de l'intensité du champ $\mathbf{E}$ au point défini par le rayon vecteur $\mathbf{r}'$. La constante diélectrique à l'intérieur et à l'extérieur du domaine V est supposée égale à l'unité.

3.12. Déterminer le potentiel φ et le module de l'intensité E d'un champ du dipôle en tant que fonctions de r et de ϑ (r est la distance du centre du dipôle, ϑ l'angle que fait l'axe du dipôle avec la direction d'une droite menée du centre du dipôle au point donné). Le moment du dipôle est p.

3.13. Le potentiel d'un champ créé par un certain système de charges a pour expression $\varphi = a(x^2 + y^2) + bz^2$ où $a > 0$, $b > 0$.

1) Déterminer le vecteur champ $\mathbf{E}$ et son module E.

2) Quelle est la forme des surfaces équipotentielles?

3) Quelle est la forme des surfaces telles que $E = \text{const}$?

3.14. Le potentiel d'un champ créé par un système de charges est donné par l'expression $\varphi = a(x^2 + y^2) - bz^2$ où $a > 0$, $b > 0$. Répondre aux questions du problème précédent.

3.15. L'espace est rempli de charge dont la densité est donnée par $\rho = \rho_0/r$ où ρ_0 est une constante, r, la distance à l'origine des coordonnées. Déterminer l'intensité du champ $\mathbf{E}$ en tant que fonction de $\mathbf{r}$. Faire l'analyse de l'allure des lignes d'intensité. Le domaine au voisinage de l'origine des coordonnées est à exclure de l'analyse.

3.16. Un espace est rempli de charge de densité $\rho = \rho_0 e^{-\alpha r^3}$ où ρ_0 et α sont des constantes. Déterminer $\mathbf{E}$ comme fonction de $\mathbf{r}$. Etudier les caractéristiques du champ pour de grands et de petits r.

3.17. Une plaque infinie en isolant de permittivité ε est chargée uniformément de densité volumique ρ. L'épaisseur de la plaque est $2a$. La permittivité diélectrique en dehors de la plaque est 1. On dirige l'axe des x perpendiculairement à la plaque et prend le milieu de la plaque pour origine des coordonnées. Déterminer en fonction de x le potentiel φ et E_x (la projection de l'intensité du champ sur l'axe des x). Le potentiel au milieu de la plaque est posé nul. Tracer les graphiques de φ et de E_x.

3.18. Une tige rectiligne, très fine, de longueur $2a$ placée dans le vide porte une charge de densité linéaire constante λ. Pour des points situés sur une droite passant perpendiculairement à l'axe de la tige en son centre déterminer le module de l'intensité du champ

E en fonction de la distance r au centre de la tige. Etudier le cas où $a \to \infty$.

3.19. Pour la tige du problème précédent, déterminer en fonction de la distance r au centre de la tige le potentiel φ et le module de l'intensité du champ E en des points situés sur l'axe de la tige en dehors de celle-ci. Etudier le cas où $r \gg a$.

3.20. Un fil fin infini rectiligne placé dans le vide porte une charge de densité linéaire constante $\lambda = 2{,}00 \cdot 10^{-6}$ C/m.

1) Déterminer, en fonction de la distance r au fil, le module de l'intensité du champ E et le potentiel φ.

2) Calculer E et φ pour $r = 10{,}0$ m.

3.21. Une charge $q = 2{,}00 \cdot 10^{-8}$ C est uniformément répartie le long d'un anneau en fil de rayon $r = 60{,}0$ mm placé dans le vide.

1) En prenant l'axe de l'anneau pour axe des x, déterminer le potentiel φ et le vecteur champ $\mathbf{E}$ sur l'axe de l'anneau en fonction de la coordonnée x (l'origine est au centre de l'anneau).

2) Etudier les cas: $x = 0$ et $|x| \gg r$.

3) Déterminer la valeur maximale du module de l'intensité E_m et les points x_m où elle est observée.

4) Tracer les graphiques approximatifs des fonctions $\varphi(x)$ et $E_x(x)$ (E_x est la projection du vecteur champ sur l'axe des x). Que sont les points x_m pour la courbe $\varphi(x)$?

Calculer l'intensité du champ de deux manières: 1) en partant de l'expression de l'intensité du champ d'une charge ponctuelle et du principe de superposition des champs, 2) en partant de l'expression du potentiel. Comparer les deux méthodes de calcul.

3.22. Une charge $q = 1{,}80 \cdot 10^{-6}$ C est uniformément distribuée sur une plaque ronde très mince de rayon $r = 120$ mm placée dans le vide. En prenant l'axe de la plaque pour axe des x,

a) déterminer en fonction de x, le potentiel φ et la projection de l'intensité du champ E_x en des points situés sur l'axe; étudier l'expression obtenue pour $|x| \ll r$ et $|x| \gg r$;

b) calculer φ et E_x au point $x = 80{,}0$ mm.

3.23. Une plaque très mince en forme d'un anneau de rayons intérieur a et extérieur b est placée dans le vide. Sur la plaque est uniformément distribuée une charge q. En prenant l'axe de la plaque pour axe des x, déterminer en fonction de la coordonnée x le potentiel φ et le module de l'intensité du champ E sur l'axe de la plaque. Etudier le cas où $|x| \gg b$.

3.24. On a un condensateur plan constitué par deux armatures rondes de rayon r distantes l'une de l'autre de $2a$ ($a \ll r$). On communique aux armatures des charges égales mais de signes opposés. On prend pour axe des x l'axe passant par les centres des armatures et pour origine des coordonnées, le centre du condensateur. En supposant que les charges sont distribuées sur les armatures avec une densité constante σ, étudier l'intensité du champ $\mathbf{E}$ en des points situés sur l'axe des x. Pour ce faire, déterminer:

a) la projection de **E** sur l'axe des x (i.e. E_x) en fonction de x;

b) $E_x(0)$, i. e. E_x au centre du condensateur;

c) $E_x(a-0)$, i.e. E_x au point de coordonnée $x = a - \delta$ $(\delta \to 0)$;

d) $E_x(a+0)$, i.e. E_x au point de coordonnée $x = a + \delta$ $(\delta \to 0)$;

e) E_x en tant que fonction de x en des points tels que $|x| \gg r$.

On néglige l'épaisseur des armatures.

3.25. En exploitant le théorème de Gauss, on sait aisément obtenir l'expression de l'intensité du champ créé dans le vide par un plan infini uniformément chargé, à savoir $E = \sigma/2\varepsilon_0$. Prenons un point P se trouvant à la distance b du plan (fig. 114). Menons une circonférence de rayon a centrée sur la base de la perpendiculaire au plan abaissée du point P. Il faut trouver la valeur de a telle que l'intensité au point P créée par les charges situées à l'intérieur de la circonférence constitue la moitié de l'intensité totale. Déterminer également r correspondant à cette valeur de a et l'angle ϑ entre r et b.

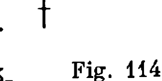


Fig. 114

3.26. Déterminer le potentiel φ et l'intensité du champ E au centre d'un hémisphère de rayon R portant des charges de densité superficielle constante σ. Poser $\varepsilon = 1$.

3.27. Une charge $q = 2{,}00 \cdot 10^{-6}$ C est uniformément distribuée dans le volume d'une sphère de rayon $R = 40{,}0$ mm. Déterminer le potentiel φ_0 au centre de la sphère. La permittivité diélectrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère est égale à l'unité.

3.28. Déterminer le potentiel φ à l'intérieur de la sphère chargée du problème précédent en fonction de la distance r au centre de la sphère. Calculer φ pour $r = 20{,}0$ mm.

3.29. A l'intérieur d'une sphère uniformément chargée avec une densité volumique constante ρ est pratiquée une cavité sphérique, exempte des charges. Le centre de la cavité est déplacé de a par rapport au centre de la sphère. Déterminer l'intensité du champ **E** à l'intérieur de la cavité. La permittivité diélectrique est posée égale à l'unité. Envisager le cas où $a = 0$.

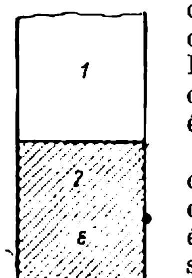


Fig. 115

3.30. Initialement, l'espace entre les armatures d'un condensateur plan est rempli d'air. L'intensité du champ dans l'interstice est alors E, le déplacement électrique D. On remplit ensuite la moitié de l'interstice d'un diélectrique de permittivité ε de la manière indiquée fig. 115. Déterminer l'intensité du champ et le déplacement électriques qui s'en suivent dans la partie *1*: E_1 et D_1, et dans la partie *2*: E_2 et D_2 (voir la figure). Traiter deux cas:

a) la tension entre les armatures demeure constante;

b) les charges portées par les armatures demeurent constantes.

Tracer l'allure approximative des lignes E et D dans l'interstice.

3.31. Résoudre le problème analogue au précédent à cette différence près que le diélectrique remplit l'espace entre les armatures de la manière indiquée fig. 116.

3.32. Une lame de verre introduite dans un champ électrique uniforme d'intensité $E_1 = 10{,}0$ V/m est disposée de telle sorte que l'angle α_1 entre la normale à la lame et la direction du champ extérieur est égal à 30°. Déterminer l'intensité du champ E_2 dans la lame, l'angle α_2 que fait ce champ avec la normale à la lame ainsi que la densité σ' des charges liées qui naissent sur les faces de la lame. La permittivité diélectrique du milieu à l'extérieur de la lame ε_1 est posée égale à l'unité.

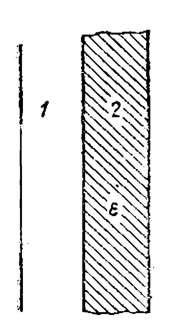


Fig. 116

3.33. Un champ électrique uniforme d'intensité $E = 100$ V/m est créé à l'intérieur d'une sphère en diélectrique isotrope homogène de $\varepsilon = 5{,}00$. Déterminer la densité superficielle maximale de charges liées σ'_{max} et la valeur moyenne de σ' du même signe.

3.34. Une baguette en substance seignetto-électrique qui possède une polarisation résiduelle P_r dirigée le long de l'axe de la baguette est suspendue horizontalement à un fil fin inélastique. Déterminer la pulsation des petites oscillations qu'effectue la baguette dans un champ E uniforme de direction horizontale et tellement faible qu'il n'influe pas sensiblement sur la polarisation de la baguette. La longueur de la baguette est l, la densité δ.

3.35. Une charge ponctuelle $q = 2{,}00 \cdot 10^{-8}$ C est placée dans le vide à la distance $a = 50$ mm d'une paroi métallique plane mise à la terre. Déterminer la force f avec laquelle la paroi attire la charge.

3.36. Une charge ponctuelle q se trouve à la distance a d'une paroi métallique plane mise à la terre. Déterminer la densité superficielle σ de charges induites sur la paroi en fonction de la distance x de la base de la perpendiculaire abaissée de la charge sur la paroi. Calculer la charge induite totale q_{ind} en supposant infinies les dimensions de la paroi.

3.37. On applique une tension constante $U = 300$ V à deux condensateurs $C_1 = 100$ pF et $C_2 = 200$ pF montés en série. Déterminer les tensions U_1 et U_2 sur les condensateurs et la charge q portée par les armatures. Capacité C du système?

3.38. Dans le montage de la fig. 117 $\mathscr{E} = 100$ V, $C_1 = 1{,}00$ µF, $C_2 = 2{,}00$ µF, $C_3 = 3{,}00$ µF. Initialement, on ferme le commutateur K_1. Ensuite, on ouvre K_1 et ferme le commutateur K_2. Quelles charges q_1, q_2 et q_3 passent alors à travers les sections *1*, *2* et *3* dans les directions indiquées par les flèches?

3.39. Les condensateurs $C_1 = 2{,}00$ µF et $C_2 = 3{,}00$ µF montés en série sont branchés à une batterie de $\mathscr{E} = 120$ V dont le point neutre est mis à la terre (fig. 118). Le fil reliant les condensateurs peut être mis à la terre à l'aide du commutateur K. Déterminer les

charges q_1, q_2 et q_3 qui passeront à travers les sections *1*, *2* et *3* dans les sens indiqués sur la figure après la fermeture du commutateur.

3.40. Deux longs fils conducteurs de rayon $a = 0{,}50$ mm sont disposés dans l'air parallèlement l'un à l'autre. La distance entre leurs axes est $b = 10{,}0$ mm. Déterminer la capacité mutuelle des fils C_1 par unité de leur longueur.

3.41. a) Déterminer la capacité C d'un condensateur constitué par deux billes identiques de même rayon a placées dans un milieu

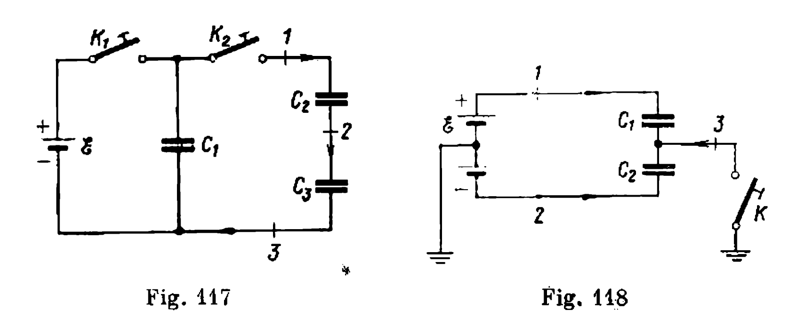


Fig. 117 Fig. 118

dont la constante diélectrique est ε. La distance entre les centres des billes est b. On suppose les charges distribuées uniformément sur les surfaces des billes.

b) Etudier le cas où $b \gg a$.

c) Calculer C sachant que $a = 10{,}0$ mm, $b = 300$ mm, $\varepsilon = 1{,}00$.

3.42. L'armature extérieure d'un condensateur sphérique peut se rétracter tout en gardant sa forme strictement sphérique et restant concentrique à l'armature intérieure rigide. On communique aux armatures les charges de même valeur $q = 2{,}0 \cdot 10^{-6}$ C, mais de signe opposé. L'armature extérieure s'en rétracte alors sous l'action des forces électriques de sorte que son rayon diminue de $a = 100{,}0$ mm à $b = 95{,}0$ mm. Calculer le travail A produit par des forces électriques. La permittivité diélectrique relative du milieu entre les armatures est posée égale à l'unité.

3.43. L'espace entre les armatures d'un condensateur plan est garni d'un diélectrique isotrope dont la constante diélectrique varie linéairement, suivant la direction perpendiculaire aux armatures, de la valeur $\varepsilon_1 = 2{,}00$ au voisinage d'une armature à la valeur $\varepsilon_2 = 5{,}44$ au voisinage de l'autre. On applique au condensateur une tension $U = 1000$ V et on voit apparaître la charge positive libre sur l'armature au voisinage de laquelle ε est plus petit. Déterminer le signe et la valeur moyenne de la densité volumique $\langle \rho' \rangle$ de charges liées qui se créent au sein du diélectrique. Calculer la capacité du condensateur C. L'aire de chaque armature est $S = 100 \cdot 10^{-4}$ m^2, la distance entre les armatures $d = 1{,}00$ mm.

3.44. On communique les charges $+q$ et $-q$ aux armatures d'un condensateur plan. L'espace entre les armatures est garni d'une

substance isotrope dont la constante diélectrique varie comme $\varepsilon = \varepsilon(x)$ suivant la direction x perpendiculaire aux armatures. Au voisinage immédiat de l'armature positivement chargée $\varepsilon = \varepsilon_1$, au voisinage immédiat de l'armature négative $\varepsilon = \varepsilon_2$. Déterminer, en fonction de x, la densité volumique ρ' de charges liées. Calculer la charge liée totale q' apparaissant dans tout le volume du diélectrique. L'aire de chaque armature est S.

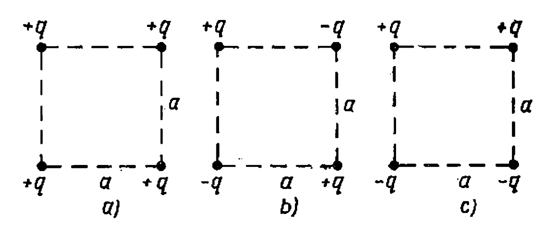


Fig. 119

3.45. Calculer l'énergie potentielle mutuelle W pour chacun des systèmes de charges ponctuelles représentés fig. 119. Toutes les charges ont la même valeur absolue et sont placées aux sommets d'un carré de côté a.

3.46. Calculer l'énergie potentielle mutuelle W d'un système de N charges ponctuelles $q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_N$ situées dans le vide en des points définis par les rayons vecteurs $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_N$.

3.47. Dans un corps de volume V est distribuée une charge de densité $\rho = \rho(\mathbf{r})$. Déterminer l'expression de l'énergie W de ce corps chargé, en posant égale à l'unité la constante diélectrique à l'intérieur et à l'extérieur du corps.

3.48. Deux électrons séparés initialement par une très grande distance (pratiquement infinie) se déplacent l'un à la rencontre de l'autre à la vitesse relative v_0 ($v_0 \ll c$). Calculer la distance minimale a dont ils se rapprochent. Envisager deux cas:

a) les deux électrons sont libres (i.e. ils ne sont soumis à aucune action extérieure sauf la force de leur interaction);

b) l'un des électrons est immobile relativement à un certain référentiel galiléen.

3.49. Déterminer le travail A qu'il faut fournir pour augmenter de $\Delta x = 0{,}200$ mm la distance x entre les armatures d'un condensateur plan. Les armatures portent les charges de signes opposés dont la valeur est $q = 2{,}00 \cdot 10^{-7}$ C. L'aire de chaque armature est $S = 400 \cdot 10^2$ mm^2. L'espace entre les armatures est rempli d'air.

3.50. Une charge ponctuelle $q = 3{,}00 \cdot 10^{-6}$ C est placée au centre d'une couche sphérique de diélectrique isotrope homogène de $\varepsilon = 3{,}00$. Les rayons intérieur et extérieur de la couche sont respectivement $a = 250$ mm et $b = 500$ mm. Déterminer l'énergie W emmagasinée dans le diélectrique.

3.51. Calculer l'énergie W de la sphère chargée du problème 3.27. Déterminer l'énergie W_1 emmagasinée à l'intérieur de la sphère et l'énergie W_2 contenue dans l'espace environnant.

Courant électrique

3.52. Le circuit indéfini de la fig. 120 est obtenu par répétition d'une même maille composée des résistances $R_1 = 2\,\Omega$ et $R_2 = 4\,\Omega$. Déterminer la résistance R de ce circuit.

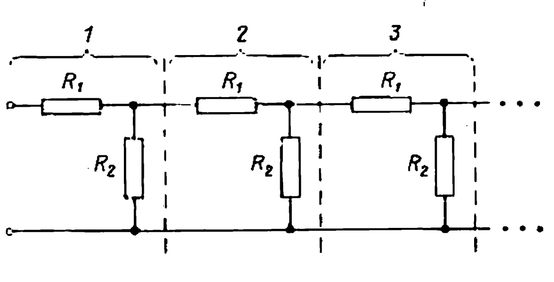


Fig. 120

3.53. Un anneau plat d'épaisseur d est fabriqué du matériau de résistivité ρ. Les rayons de l'anneau sont a et b ($b > a$). On maintient une certaine différence de potentiel entre les surfaces cylindriques extérieure et intérieure de l'anneau. Résistance R de l'anneau dans ces conditions?

3.54. Une sphère métallique de rayon a est entourée d'une enveloppe métallique concentrique de rayon b. L'espace entre ces électrodes est garni d'un milieu conducteur, isotrope et homogène, de résistivité ρ. Déterminer la résistance R de l'interstice entre les électrodes. Etudier le cas où $b \to \infty$.

3.55. Entre les armatures d'un condensateur plan est introduite, parallèlement aux armatures, une lame en cuivre dont l'épaisseur constitue $\frac{1}{3}$ de la distance des armatures. La capacité du condensateur sans lame est $C = 2{,}50 \cdot 10^4$ pF. Branché à une source de courant, le condensateur se trouve chargé jusqu'à la d.d.p. $U = 100{,}0$ V. Déterminer :

a) le travail A_1 nécessaire pour retirer la lame du condensateur;

b) le travail A_2 que fournit alors la source de courant. L'échauffement de la lame est négligeable.

3.56. Résoudre le problème analogue au précédent à cette différence près que la lame en cuivre est remplacée par celle en diélectrique de permittivité $\varepsilon = 3{,}00$.

3.57. L'espace entre les armatures d'un condensateur plan est garni d'un diélectrique isotrope dont la conductivité σ varie linéairement, de $\sigma_1 = 1{,}00 \cdot 10^{-12}$ S/m à $\sigma_2 = 1{,}00 \cdot 10^{-11}$ S/m, suivant la

direction perpendiculaire aux armatures. Déterminer le courant de fuite i à travers le condensateur sachant que la différence de potentiel appliquée aux armatures est $U = 300$ V. L'aire des armatures est $S = 100$ cm^2, la distance entre armatures $d = 2{,}00$ mm.

3.58. Le diélectrique d'un condensateur plan se compose de deux couches (fig. 121) caractérisées par les permittivités diélectriques $\varepsilon_1 = 2{,}00$ et $\varepsilon_2 = 3{,}00$ et par les résistivités $\rho_1 = 1{,}00 \cdot 10^{10}$ Ω·m et $\rho_2 = 2{,}00 \cdot 10^{10}$ Ω·m. Les épaisseurs des couches sont respectivement $d_1 = 2{,}00$ mm et $d_2 = 1{,}00$ mm. On applique aux armatures une d.d.p. $U = 100$ V (l'armature gauche est positive, celle droite négative).

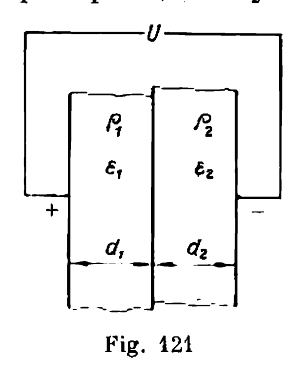


Fig. 121

1. Déterminer: a) les intensités des champs E_1 et E_2 et les déplacements électriques D_1 et D_2 dans les deux couches; b) la densité de charges libres sur l'armature gauche σ_1, sur l'armature droite σ_2 et sur le plan de séparation de deux couches σ; c) la densité de charges liées au voisinage de l'armature gauche σ_1', au voisinage de l'armature droite σ_2' et sur le plan de séparation de deux couches σ'; d) la densité de courant j traversant le diélectrique.

2. Déterminer les grandeurs citées au point 1 pour le cas où $\rho_1 = \infty$.

3.59. L'espace entre les armatures d'un condensateur plan est garni d'une substance de permittivité diélectrique $\varepsilon = 7{,}00$ et de résistivité $\rho = 1{,}00 \cdot 10^{11}$ Ω·m. La capacité du condensateur $C = 3000$ pF. Calculer le courant de fuite à travers le condensateur lorsqu'on lui applique une tension $U = 2000$ V.

3.60. Les armatures d'un condensateur de forme arbitraire sont séparées par un milieu homogène isotrope qui est un faible conducteur dont la résistivité est ρ et la permittivité diélectrique ε. Trouver le courant de fuite i à travers le condensateur lorsqu'on lui applique une tension U. La capacité du condensateur est C.

3.61. Deux électrodes sous forme de billes métalliques de rayon a sont placées dans un milieu de résistivité électrique ρ. La distance entre centres des billes est b. Déterminer la résistance R entre les électrodes. Etudier le cas où $b \gg a$.

3.62. Deux armatures carrées de côté $a = 300$ mm fixées à la distance $d = 2{,}00$ mm l'une de l'autre constituent un condensateur plan branché à la source de tension continue $U = 250$ V. Les armatures plongent verticalement, à la vitesse $v = 5{,}00$ mm/s, dans une cuve avec du kérosène. Déterminer l'intensité du courant circulant alors dans les fils conducteurs.

3.63. Un condensateur de capacité $C = 300$ pF est branché par l'intermédiaire d'une résistance $R = 500\,\Omega$, à une source de tension continue U_0. Déterminer le temps au bout duquel la tension sur le condensateur constituera $0{,}99\, U_0$.

3.64. Au bout du temps $\tau = 5{,}00$ mn un condensateur au papier (i.e. un condensateur dont le diélectrique est le papier paraffiné ; $\varepsilon = 2{,}10$) perd la moitié de sa charge primitive. En supposant que la fuite d'électricité ne se produise qu'à travers la garniture diélectrique, calculer la résistivité ρ de cette dernière.

3.65. Les rayons des armatures d'un condensateur sphérique sont a et b ($a < b$). L'espace entre les armatures est garni d'une substance homogène isotrope dont la constante de permittivité diélectrique est ε et la conductivité σ. Initialement, le condensateur est non chargé. On communique ensuite à l'armature intérieure une charge q_0. Déterminer :

a) la loi de la variation de charge q sur l'armature intérieure ;

b) la quantité de chaleur Q dégagée lors de l'écoulement de la charge.

Comparer Q avec la variation d'énergie électrique du condensateur.

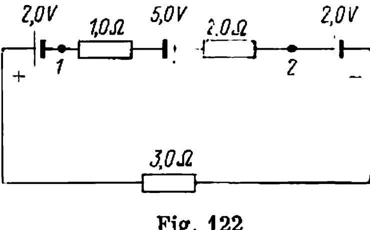


Fig. 122

3.66. Un circuit de courant continu représenté fig. 122 se compose de trois sources de courant et de trois résistances montées en série. Calculer la d.d.p. $\varphi_1 - \varphi_2$ entre les points *1* et *2*. Négliger les résistances internes des sources de courant ainsi que celles des fils de connexion.

3.67. N sources identiques de courant ayant chacun la f.é.m. $\mathscr{E}$ et la résistance interne R_0 et le même nombre de résistances R constituent un circuit fermé à N maillons comme l'indique la fig. 123.

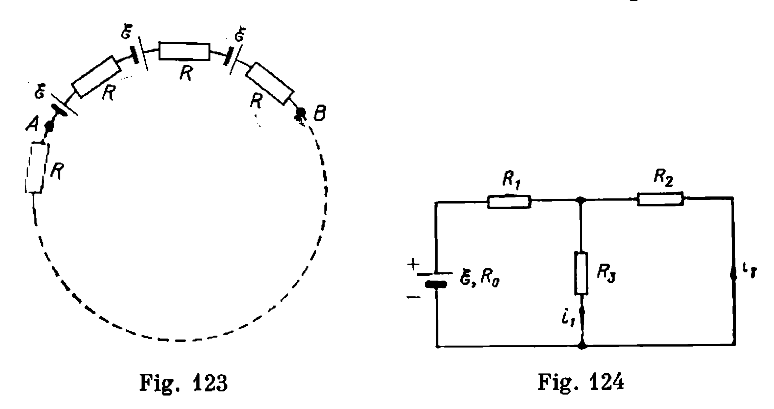


Fig. 123 Fig. 124

Déterminer la d.d.p. entre les points A et B divisant le circuit en n et N-n maillons. La résistance des fils de connexion est négligeable.

3.68. Dans le schéma de la fig. 124 $\mathscr{E} = 5{,}0$ V, $R_1 = 1{,}00\,\Omega$, $R_2 = 2{,}00\,\Omega$, $R_3 = 3{,}00\,\Omega$. La résistance interne de la source de courant est $R_0 = 0{,}10\,\Omega$. Déterminer les intensités des courants i_1 et i_2.

3.69. Dans le schéma de la fig. 125, $\mathscr{E}_1 = 10{,}0$ V, $\mathscr{E}_2 = 20{,}0$ V, $\mathscr{E}_3 = 30{,}0$ V, $R_1 = 1{,}00\ \Omega$, $R_2 = 2{,}00\ \Omega$, $R_3 = 3{,}00\ \Omega$, $R_4 = 4{,}00\ \Omega$, $R_5 = 5{,}00\ \Omega$, $R_6 = 6{,}00\ \Omega$, $R_7 = 7{,}00\ \Omega$. Résistances internes des sources de courant sont négligeables. Déterminer les intensités des courants i_1, i_2 et i_3.

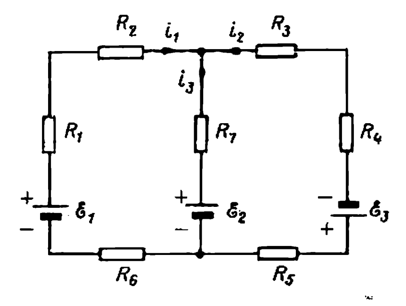


Fig. 125

3.70. La fig. 126, *a*, *b* représente deux circuits de courant continu. On néglige la résistance interne des sources ainsi que celle des fils de connexion. Déterminer dans les deux cas les courants circulant à travers les résistances. Comment changent les courants du schéma a) si l'on coupe les fils aux points A et B?

3.71. Les éléments du schéma représenté fig. 127 ont pour valeurs: $\mathscr{E}_1 = 1{,}00$ V, $\mathscr{E}_2 = 2{,}00$ V, $\mathscr{E}_3 = 3{,}00$ V, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $R_3 = 300\ \Omega$, $R_4 = 400\ \Omega$. Déterminer les courants à travers les résistances. Les résistances des sources de courant et des fils de connexion sont négligeables.

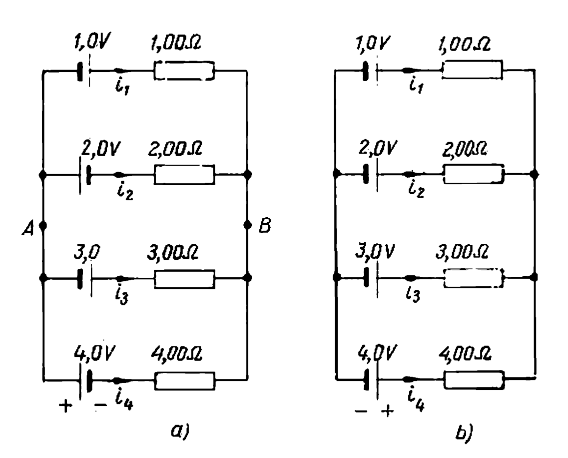


Fig. 126

3.72. La fig. 128 représente le schéma d'un potentiomètre. Ce dispositif permet d'alimenter un appareil R, consommateur de courant, en toute tension dans l'intervalle de 0 à U_0 que fournit une source de tension continue U_0. Les potentiomètres les plus simples ont la résistance R_0 faite en fil homogène sur lequel glisse un curseur C. Déterminer la tension U appliquée à l'appareil R en fonction de la distance x du curseur à l'extrémité du fil R_0. Étudier le cas où $R \gg R_0$.

3.73. On veut fabriquer une résistance pour un réchaud électrique de puissance 0,50 kW pouvant être branché au secteur de tension 220 V. Quelle doit être la longueur (en mètres) d'un fil de nichrome de diamètre 0,40 mm? La résistance du nichrome à chaud est $1{,}05 \cdot 10^{-6}$ Ω·m.

3.74. On a $N = 24$ sources de courant identiques dont chacun a la f.é.m. $\mathscr{E} = 1{,}00$ V et la résistance interne $R_0 = 0{,}200$ Ω. Ces

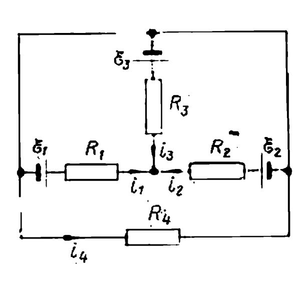


Fig. 127

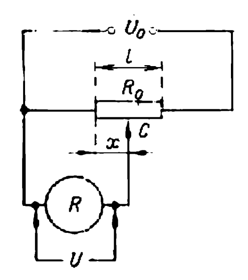


Fig. 128

sources sont montées en une batterie de n sections en série dont chacune comprend N/n sources associées en parallèle. On branche un appareil de résistance $R = 0{,}30$ Ω aux bornes de la batterie. Pour quelle valeur de n la puissance W consommée par l'appareil sera-t-elle maximale? Quelle est cette valeur maximale de W?

3.75. On communique aux armatures d'un condensateur de capacité $C = 2{,}00$ µF les charges de valeur $q_0 = 1{,}00 \cdot 10^{-3}$ C et de signe opposé. Ensuite, on relie les armatures par la résistance $R = 5000$ Ω. Déterminer:

a) la loi de variation du courant traversant la résistance;

b) la charge q qui a passé par la résistance pendant le temps $\tau = 2{,}00$ ms;

c) la quantité de chaleur Q dégagée dans la résistance pendant le même temps.

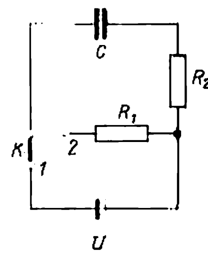


Fig. 129

3.76. Le condensateur de capacité $C = 5{,}00$ µF est branché à la source de courant continu de tension $U = 200$ V (fig. 129). Ensuite on fait passer le commutateur K de la borne *1* à la borne *2*. Calculer la quantité de chaleur Q dégagée dans la résistance $R_1 = 500$ Ω. La résistance R_2 a pour valeur 300 Ω. La résistance des fils de connexion est supposée nulle.

Electromagnétisme

3.77. Une spire circulaire de rayon $R = 100$ mm est traversée par un courant d'intensité $i = 1{,}00 A$. Déterminer l'induction magnétique B:

a) au centre de la spire;

b) sur l'axe de la spire à la distance $b = 100$ mm de son centre.

3.78. Un circuit fermé parcouru par un courant d'intensité i comporte un segment rectiligne long de $2a$. Un point P est situé sur la perpendiculaire passant par son milieu à la distance b du segment. Déterminer la fraction de l'induction magnétique B au point P, créée par le segment donné. Etudier le cas où $a \to \infty$.

3.79. Un fil en forme d'un polygone régulier à n côtés inscrit à une circonférence de rayon R est traversé par un courant d'intensité i. Déterminer l'induction magnétique B au centre du polygone. Analyser l'expression obtenue pour le cas où $n \to \infty$.

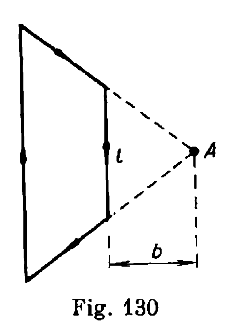


Fig. 130

3.80. Un contour en forme d'un trapèze isocèle (fig. 130) est traversé par un courant d'intensité $i = 6{,}28$ A. Le rapport des bases du trapèze est 2,00. Déterminer l'induction magnétique B en un point A situé dans le plan du trapèze. La petite base du trapèze est $l=100$ mm, la distance $b = 50{,}0$ mm.

3.81. Un solénoïde de rayon r et de longueur l a n spires par unité de longueur. Le solénoïde est traversé par un courant d'intensité i. Déterminer l'intensité du champ H sur l'axe du solénoïde en fonction de la distance x à son centre. Etudier les cas:

a) x est fini, $l \to \infty$;

b) $x = l/2$, $l \to \infty$.

3.82. Un fil isolé de diamètre 0,30 mm (isolant y compris) forme une spirale plane contenant $N = 100$ spires. Le rayon de la spire intérieur (suivant l'axe du fil) est $R_1 = 10{,}3$ mm, celui de la spire extérieure $R_2 = 40{,}0$ mm. Quel moment magnétique p_m acquiert cette spirale lorsqu'elle est traversée par un courant d'intensité $i = 10{,}0$ mA? Quelle est alors l'intensité du champ magnétique H au centre de la spirale?

3.83. Un fil rectiligne de rayon R est traversé par un courant de densité constante **j**. Etablir l'expression vectorielle de l'intensité du champ **H** en un point tel que sa position par rapport à l'axe du fil soit définie par un rayon vecteur **r** perpendiculaire à cet axe. Traiter les cas où le point est situé à l'intérieur et à l'extérieur du fil.

3.84. A l'intérieur d'un fil rectiligne de section circulaire est pratiquée une cavité cylindrique dont l'axe est parallèle à celui du fil et en est séparé par une distance b. Le fil est traversé par un courant de densité constante **j**. Déterminer l'intensité du champ magnétique **H** à l'intérieur de la cavité. Envisager le cas où $b = 0$.

3.85. Une sphère d'ébonite de rayon $R = 50$ mm acquiert par frottement une charge uniformément distribuée de densité superficielle $\sigma = 1{,}00 \cdot 10^{-5}$ C/m². La sphère est mise en rotation autour de son axe à raison de $n = 600$ tr/mn. Déterminer l'induction magnétique B au centre de la sphère.

3.86. La sphère du problème 3.33 est mise en rotation autour de son axe dont la direction coïncide avec celle de **E** à l'intérieur de la sphère. Déterminer l'induction magnétique B au centre de la sphère.

3.87. Une charge q est uniformément distribuée dans le volume d'une sphère homogène de masse m et de rayon R. La sphère est mise en rotation à la vitesse angulaire ω autour de son axe. Déterminer le moment cinétique (moment mécanique) M et le moment magnétique p_m causés par la rotation, ainsi que le rapport de p_m à M.

3.88. Une petite aiguille aimantée effectue de petites oscillations de période $T_1 = 1{,}33$ s dans le champ magnétique terrestre. Placée à l'intérieur d'un solénoïde traversé par un courant, l'aiguille oscille avec la période $T_2 = 0{,}16$ s. Déterminer l'induction magnétique B_2 à l'intérieur du solénoïde. La composante horizontale du champ magnétique terrestre est $B_1 = 18{,}0$ µT. On néglige l'amortissement des oscillations de l'aiguille.

3.89. L'espace entre deux armatures circulaires parallèles est garni d'un milieu homogène faiblement conducteur de conductivité σ et de constante diélectrique ε. La distance entre les armatures d est bien inférieure au rayon des armatures R. On applique aux armatures une tension variable, $U = U_m \cos \omega t$ (ω est suffisamment petit pour que les conditions soient quasi stationnaires). Calculer l'intensité du champ magnétique H dans l'espace entre les armatures à la distance r de l'axe de celles-ci bien inférieure à R.

3.90. Montrer que malgré la présence des courants de conduction circulant dans les directions radiales l'intensité du champ magnétique H dans l'interstice du condensateur sphérique du problème 3.65 est nulle.

3.91. Deux petites bobines identiques sont disposées de sorte que luers axes se trouvent sur une même droite. La distance entre les bobines l, égale à 200 mm, est de beaucoup supérieure à leurs dimensions linéaires. Le nombre de spires de chaque bobine est $N = 100$, le rayon d'une spire $r = 10$ mm. Quelle force f s'exercent les bobines lorsqu'elles sont traversées par un même courant $i = 0{,}10$ A?

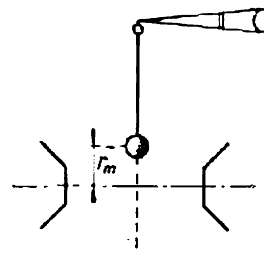


Fig. 131

3.92. Dans une méthode de mesure de la perméabilité magnétique χ, la bille en matériau étudié suspendue par un fil au fléau d'une balance est placée entre les pôles d'un électro-aimant (fig. 131). Ayant mesuré à la balance la force d'attraction (ou de répulsion) exercée sur la bille par le champ magnétique, on peut déterminer la perméabilité χ.

Soit H l'intensité du champ dans le plan de symétrie de l'aimant, qui varie selon la loi $H = H_0 e^{-\alpha r^2}$, H_0 étant l'intensité du champ sur l'axe de l'aimant, α une constante. A quelle distance r_m de l'axe

faut-il placer la bille pour que la force d'attraction f soit maximale?

Calculer χ pour l'aluminium en sachant que $H_0 = 1500$ kA/m, $\alpha = 100\ m^{-2}$, la masse de la bille en aluminium $m = 0{,}150$ g, la force d'attraction maximale $f_m = 7{,}4\ \mu N$.

3.93. A côté d'un long fil rectiligne traversé par un courant $i_1 = 30$ A est disposé un cadre carré avec un courant $i_2 = 2{,}0$ A. Le cadre et le fil sont situés dans un même plan. L'axe du cadre passant par les milieux des côtés opposés est parallèle au fil et en est éloigné de $b = 30$ mm. Le côté du cadre vaut $a = 20$ mm. Déterminer la force f agissant sur le cadre et le travail A qu'il faut effectuer pour tourner le cadre autour de son axe de 180°.

3.94. Le cadre d'un galvanomètre à miroir est suspendu à un fil dont la constante de torsion est $k = 10{,}0\ \mu N \cdot m/rd$. Le cadre est constitué par $N = 100$ spires rectangulaires de dimensions 50×30 mm en fil fin. Il peut tourner dans l'entrefer d'un aimant où, grâce à la forme des pôles de celui-ci, le champ agissant sur le cadre possède une symétrie axiale (le champ a une même valeur partout dans l'entrefer et est dirigé vers l'axe du cadre). L'intensité du champ dans l'entrefer est $H = 100$ kA/m. A la distance $l_1 = 1\,200$ mm du miroir de galvanomètre est placée une échelle millimétrique de longueur $l_2 = 800$ mm. En l'absence du courant le spot renvoyé par le miroir tombe au milieu de l'échelle.

Quelle intensité du courant maximale i_m peut être mesurée à cet appareil?

(Par la constante de torsion on entend un moment de torsion produisant une torsion du fil de $\Delta\alpha = 1$ rd.)

3.95. Une bobine parcourue par un courant $i = 10$ mA est placée dans un champ magnétique uniforme de manière que son axe coïncide avec la direction du champ. L'enroulement de la bobine est fait en fil de cuivre de diamètre $d = 0{,}100$ mm; le rayon des spires est $r = 10{,}0$ mm. A quelle valeur de l'induction magnétique B du champ excitateur l'enroulement de la bobine rompra-t-il? La résistance du cuivre à la rupture est $\sigma_r = 230$ MPa.

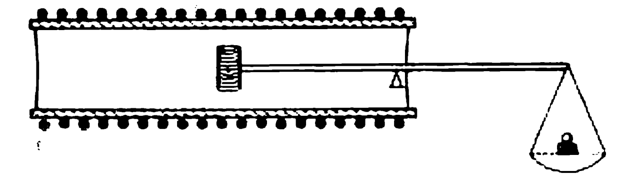


Fig. 132

3.96. A l'intérieur d'un long solénoïde comportant $n = 5000$ spires, est placée une petite bobine comportant au total $N = 200$ spires fixée au fléau d'une balance (fig. 132). L'axe de la bobine est perpendiculaire à celui du solénoïde, le diamètre de ses spires est

$d = 10,0$ mm. La bobine est équilibrée par les poids posés sur le plateau. Lorsque l'on fait passer le courant par le solénoïde et par la bobine, l'équilibre de la balance est perturbé. Quel poids supplémentaire ΔP doit-on poser sur le plateau pour maintenir l'équilibre dans le cas où le solénoïde et la bobine sont traversés par le même courant d'intensité $i = 20,0$ mA? La longueur du bras du fléau est $l = 300$ mm.

3.97. Un fil rectiligne de résistance R_1 par unité de longueur est courbé sous un angle 2α (fig. 133). Un même fil disposé perpendiculairement à la bissectrice de l'angle 2α forme avec le fil courbé un

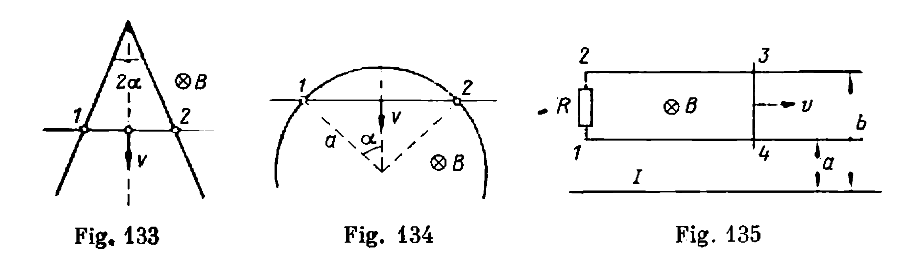


Fig. 133 Fig. 134 Fig. 135

contour triangulaire fermé. Ce contour est placé dans un champ magnétique uniforme B perpendiculaire à son plan. Déterminer le sens et l'intensité du courant i circulant dans le contour lorsque le fil *1-2* glisse à la vitesse constante v. La résistance des contacts *1* et *2* est négligeable.

3.98. Un fil de résistance R_1 par unité de longueur forme un demi-cercle de rayon a (fig. 134). Un même fil glisse sur le demi-cercle à la vitesse constante v. Le fil courbé et la corde forment un contour fermé que l'on place dans un champ magnétique uniforme B perpendiculaire à son plan. Déterminer en fonction de l'angle α l'intensité du courant dans le contour. On néglige la résistance des contacts *1* et *2*.

3.99. Une mince tige métallique de longueur $l = 1\,200$ mm tourne dans un champ magnétique uniforme, en faisant $n = 120$ tr/mn, autour d'un axe qui lui est perpendiculaire et passe à la distance $l_1 = 250$ mm de l'une de ses extrémités. Le vecteur induction $B = 1,00$ mT est parallèle à l'axe de rotation. Déterminer la d.d.p. U qui apparaît entre les extrémités de la tige.

3.100. Un disque métallique isolé de rayon $a = 250$ mm tourne en faisant $n = 1000$ tr/mn. Déterminer la d.d.p. U entre le centre et le bord du disque qui se crée:

a) en l'absence des champs magnétiques;

b) en présence d'un champ magnétique uniforme perpendiculaire au disque d'induction $B = 1,00 \cdot 10^{-2}$ T.

3.101. Soit un courant rectiligne infini d'intensité I. Deux fils non isolés parallèles au courant sont disposés aux distances a et b de celui-ci. Les fils sont reliés par une résistance R (fig. 135).

Une tige *3-4* glisse sur les fils à la vitesse v en les court-circuitant. Déterminer :

a) l'intensité et le sens du courant i dans le contour *1-2-3-4* ;

b) la force f nécessaire pour maintenir constante la vitesse de la tige *3-4* et la distance x du courant I au point d'application de la force f telle que la tige soit en translation ;

c) la puissance P dépensée pour déplacer la tige.

Les résistances des fils, de la tige et des contacts aux points *3* et *4* sont supposées nulles.

3.102. Une pièce en cuivre de masse m glisse sous l'action de la pesanteur sur deux barres en cuivre faisant un angle α avec l'horizontale ($\operatorname{tg} \alpha > k$) (fig. 136). Dans l'espace environnant les barres

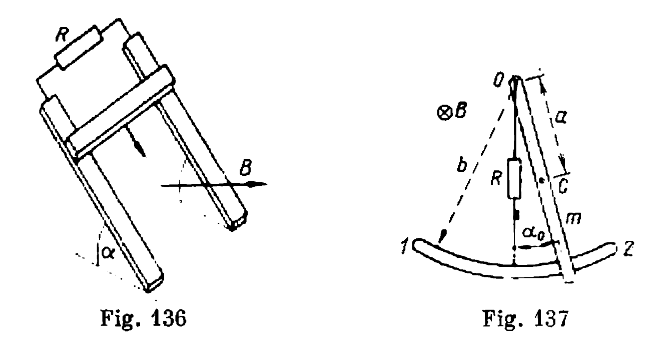


Fig. 136 Fig. 137

est excité un champ magnétique uniforme d'induction B perpendiculaire au plan du déplacement de la pièce. Les extrémités supérieures des barres sont reliées par une résistance R. Déterminer la valeur établie v de la vitesse de la pièce. Le coefficient de frottement de la pièce sur les surfaces des barres est k, la distance entre les barres l. La résistance des barres, de la pièce et des contacts est négligeable.

3.103. Soit un dispositif semblable à celui du problème précédent (voir fig. 136) dans lequel la résistance R est remplacée par un condensateur de capacité C. La pièce posée sur les barres est abandonnée à elle-même. Décrire le mouvement de la pièce en supposant nulle la résistance électrique du circuit.

3.104. Une barre métallique de masse m peut osciller autour de l'axe O (fig. 137), tel un pendule. L'extrémité inférieure de la barre glisse sur un conducteur *1-2* présentant un arc de rayon b. Entre le point de suspension O et le milieu de ce conducteur est intercalée une résistance R. L'ensemble du dispositif est placé dans un champ magnétique B perpendiculaire au plan des oscillations. La barre étant écartée d'un petit angle α_0, on l'abandonne sans vitesse initiale. Analyser son mouvement ultérieur. La distance du point de suspension au centre d'inertie de la barre C est a ; le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe passant par C est I_0. On néglige le frottement ainsi que la résistance de la barre, du conducteur *1-2* et de leur contact.

3.105. Dans le pendule du problème précédent (fig. 137) la résistance R est remplacée par un condensateur de capacité C. On écarte le pendule d'un petit angle α_0 et l'abandonne sans vitesse initiale. Décrire son mouvement ultérieur. La résistance du contour est supposée nulle.

3.106. Une barre de masse m peut tourner sans frottement autour d'un axe O en glissant (également sans frottement) sur un anneau conducteur (fig. 138) de rayon b disposé dans un plan vertical. L'ensemble du dispositif est placé dans un champ magnétique uniforme B perpendiculaire au plan de l'anneau. L'axe et l'anneau sont branchés aux bornes d'une source de courant.

Déterminer :

a) la loi de la variation de l'intensité du courant traversant la barre telle que la vitesse angulaire de celle-ci soit constante ;

b) la f.é.m. de la source $\mathscr{E}$ nécessaire pour maintenir le courant exigé.

La résistance totale du circuit est supposée constante et égale à R. L'inductance du circuit est négligeable.

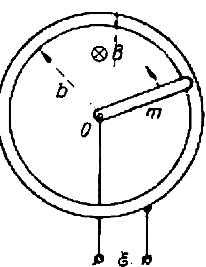


Fig. 138

3.107. Une petite bobine est placée dans l'entrefer d'un électro-aimant de telle manière que l'axe de la bobine et celui des pôles de l'aimant coïncident. La section droite de la bobine est $S = 3{,}00$ mm², le nombre de spire $N = 60$. Lorsque la bobine tourne de 180°, le galvanomètre balistique branché à ses bornes enregistre une charge $q = 4{,}50$ µC. Déterminer l'intensité du champ H dans l'entrefer. La résistance de la bobine, du galvanomètre et des fils de connexion est $R = 40{,}0\ \Omega$.

3.108. Sur une carcasse cylindrique de diamètre $d = 120$ mm il est enroulé $N = 100$ spires de fil en une couche. La longueur de l'enroulement est $l = 60$ mm. Déterminer l'inductance L de cette bobine. La perméabilité magnétique du noyau est posée égale à l'unité.

R e m a r q u e. L'inductance d'une bobine à une couche se calcule d'après la formule $L = \alpha L_\infty$, où L_∞ est l'inductance d'un solénoïde infini, α, le coefficient défini approximativement par la relation

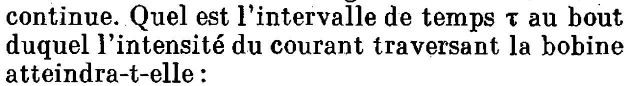
$$\alpha = \frac{1}{1+0{,}45\,(d/l)}.$$

3.109. Un cadre rectangulaire, dont la longueur $l = 10{,}0$ m est sensiblement supérieure à la largeur $b = 100$ mm (mesurée entre les axes des côtés du cadre) est fabriqué en fil de rayon $a = 1{,}00$ mm. Calculer l'inductance L du cadre. La perméabilité magnétique du milieu est posée égale à l'unité. Le champ à l'intérieur du fil est négligeable.

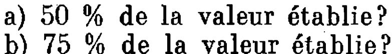
3.110. Calculer pour les fils du problème 3.40 l'inductance L_1 par unité de leur longueur. La perméabilité magnétique du matériau des fils et celle du milieu ambiant est posée égale à l'unité.

3.111. Un câble coaxial est constitué par deux conducteurs cylindriques de même axe séparés l'un de l'autre par une couche isolante. Calculer la capacité C_1 et l'inductance L_1 par unité de longueur du câble le rayon du conducteur intérieur de celui-ci étant $a = 1{,}50$ mm et le rayon du conducteur extérieur $b = 5{,}4$ mm. Le polyéthylène sert d'isolant. On tient compte du fait que les courants de haute fréquence (pour lesquels le câble est conçu) se propagent à la périphérie du conducteur.

3.112. Une bobine d'inductance $L = 250$ mH et de résistance $R = 0{,}300\,\Omega$ est branchée aux bornes d'un générateur de tension

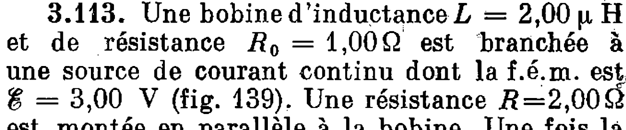


continue. Quel est l'intervalle de temps τ au bout duquel l'intensité du courant traversant la bobine atteindra-t-elle :



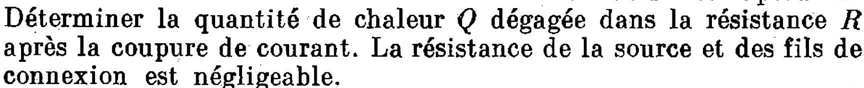
a) 50 % de la valeur établie?

b) 75 % de la valeur établie?



3.113. Une bobine d'inductance $L = 2{,}00\,\mu$H et de résistance $R_0 = 1{,}00\,\Omega$ est branchée à une source de courant continu dont la f.é.m. est $\mathscr{E} = 3{,}00$ V (fig. 139). Une résistance $R = 2{,}00\,\Omega$ est montée en parallèle à la bobine. Une fois la valeur stationnaire du courant atteinte, on débranche la source à l'aide de l'interrupteur I. Déterminer la quantité de chaleur Q dégagée dans la résistance R après la coupure de courant. La résistance de la source et des fils de connexion est négligeable.

Fig. 139



3.114. Un noyau de fer en forme de tore de diamètre $d = 500$ mm porte un enroulement dont le nombre total de spires est $N = 1000$. Le noyau est scié transversalement de sorte qu'il se forme un entrefer d'épaisseur $b = 1{,}00$ mm. Lorsque l'enroulement est parcouru par un courant d'intensité $i = 0{,}85$ A, l'intensité du champ dans l'entrefer est $H = 600$ kA/m. En déduire la perméabilité magnétique du fer μ. On néglige la dispersion des lignes d'induction.

3.115. A la fig. 140 est donnée la courbe expérimentale de première aimantation du fer doux. En se servant de ce diagramme, construire la courbe représentant la variation de la perméabilité magnétique μ en fonction du champ magnétique H. Déterminer la valeur maximale de la perméabilité μ_{max} et le champ H correspondant.

3.116. Déterminer l'inductance mutuelle d'un tore et d'un fil rectiligne indéfini passant par son axe. Le tore a la section méridienne rectangulaire de largeur δ. Le rayon intérieur du tore est a, le rayon extérieur b. Le nombre de spires du tore est N. Le tore et le fil se trouvent dans un milieu à perméabilité μ.

3.117. Un noyau de fer en forme d'un tore de section méridienne carrée porte un enroulement comportant $N = 1000$ spires. Le rayon

intérieur du tore est a — 200 mm, le rayon extérieur $b = 250$ mm. L'enroulement étant traversé par un courant $i = 1{,}26$ A, déterminer l'énergie W emmagasinée dans le noyau. Faire le calcul approximativement, en supposant le champ magnétique uniforme dans toute la section du tore et égal à la valeur H au centre de la section.

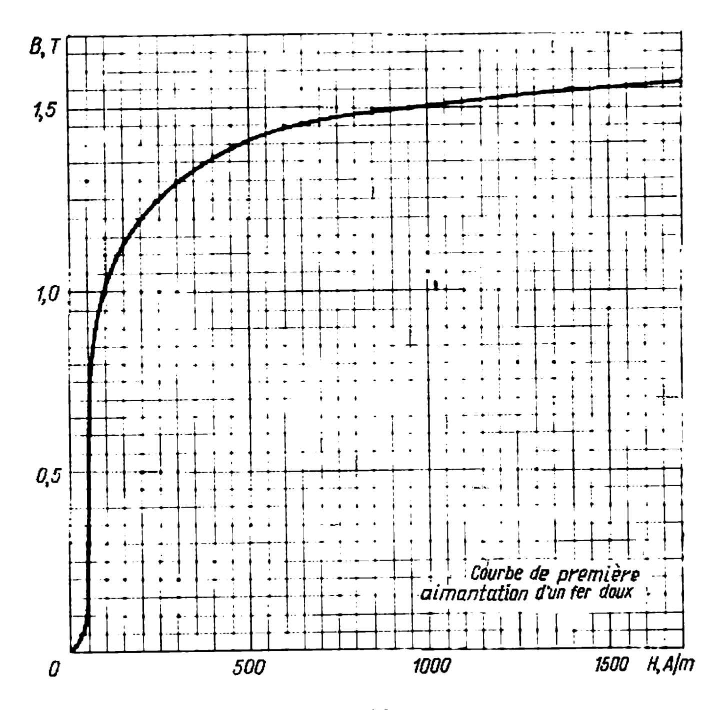


Fig. 140

3.118. Le tore du problème précédent porte maintenant un enroulement supplémentaire de $N_1 = 20$ spires branché sur un galvanomètre balistique. Quelle charge q passera par le galvanomètre après qu'on aura coupé le courant traversant l'enroulement principal du tore? La résistance équivalente de l'enroulement supplémentaire, du galvanomètre et des fils de connexion $R = 31{,}0\,\Omega$.

3.119. Un anneau en fer de diamètre moyen $d = 300$ mm et de section $S = 500$ mm² porte un enroulement ayant $N = 800$ spires. L'enroulement est parcouru par un courant d'intensité $i = 3{,}00$ A. L'anneau possède un entrefer transversal de largeur $b = 2{,}00$ mm. En négligeant la dispersion des lignes d'induction magnétique B dans l'entrefer, déterminer :

a) la perméabilité magnétique μ du fer ;

b) le flux d'induction magnétique Φ à travers la section droite de l'anneau ;

c) l'énergie W_1, emmagasinée dans le fer, l'énergie W_2 dans l'entrefer et l'énergie totale du champ W;

d) l'inductance L de l'enroulement (calculer L par deux méthodes : en l'exprimant au moyen de Φ et au moyen de W, et comparer les résultats obtenus).

3.120. Le tableau 3 rassemble les coordonnées des points d'un cycle d'hystérésis maximal pour un certain ferromagnétique (sont données les coordonnées de la partie du cycle située dans les premier et quatrième quadrants ; les mêmes nombres mais de signe opposé sont les coordonnées de la partie du cycle située dans les deuxième et troisième quadrants). On fabrique avec ce ferromagnétique un noyau d'un tore de rayon $r = 200$ mm et de section méridienne $S = 300$ mm². L'enroulement du tore est traversé par un courant alternatif de fréquence $\nu = 50$ Hz et d'une amplitude telle que l'on observe l'aimantation à saturation du ferromagnétique chaque fois que l'intensité du courant passe par maximum. Calculer la quantité de chaleur Q dégagée dans le noyau au bout du temps $\tau = 1$ mn.

Tableau 3

H, A/m	B, T		H, A/m	B, T	
	Branche inférieure du cycle	Branche supérieure du cycle		Branche inférieure du cycle	Branche supérieure du cycle
0	−0,23	0,23	500	0,92	1,15
100	0	0,46	600	1,10	1,19
200	0,23	0,69	700	1,20	1,24
300	0,46	0,92	800	1,26	1,26
400	0,69	1,08			

I n d i c a t i o n. Construire au préalable le cycle d'hystérésis sur le papier millimétrique. L'échelle recommandée : 1 cm vaut 100 A/m et 1 cm vaut 0,20 T.

Mouvement des particules chargées dans les champs électrique et magnétique

3.121. Calculer la vitesse v acquise par un électron ayant franchi une d.d.p. U égale à :

a) 100 V ;

b) 100 kV.

3.122. Dans le cas b) du problème précédent comparer v_c et v_r calculés à l'aide des formules classique et relativiste.

3.123. Une gouttelette d'huile de masse $m = 6{,}40 \cdot 10^{-16}$ kg se trouve dans un condensateur plan disposé horizontalement. La distance des armatures $d = 10{,}0$ mm. En l'absence de la d.d.p. entre les armatures la gouttelette tombe uniformément à la vitesse

$v_1 = 0{,}078$ mm/s. On applique au condensateur une d.d.p. $U = -90{,}0$ V et la gouttelette se met en mouvement uniforme vers le haut à la vitesse $v_2 = 0{,}016$ mm/s. En déduire la charge de la gouttelette e'.

3.124. Un électron entre dans un champ électrique d'intensité E avec une vitesse initiale v_0 faisant avec la direction du champ un angle aigu α. Déterminer la valeur minimale v_{min} que prend la vitesse de l'électron v pendant son mouvement dans le champ, ainsi que la courbure C de la trajectoire au moment où $v = v_{min}$.

3.125. Déterminer la force f agissant sur un électron au moment où il traverse sous un angle droit l'axe d'un long solénoïde au voisinage immédiat de l'extrémité de ce dernier. L'intensité du courant dans le solénoïde est $i = 2{,}00$ A, le nombre de spires par unité de longueur $n = 30$ cm^{-1}. La vitesse de l'électron est $v = 3{,}0 \cdot 10^7$ m/s. La perméabilité magnétique du milieu μ est supposée égale à 1.

3.126. Initialement, une particule α se déplace librement à la vitesse $v = 0{,}350 \cdot 10^7$ m/s. A un certain moment on excite, au voisinage de la particule, un champ magnétique uniforme d'induction $B = 1{,}000$ T perpendiculaire à **v**. Déterminer:

a) le rayon r de la trajectoire de la particule α;

b) la grandeur et le sens du moment magnétique p_m;

c) le rapport du moment magnétique p_m de la particule à son moment mécanique M.

La charge de la particule α est $e' = 2e$, la masse $m = 6{,}65 \cdot 10^{-27}$ kg.

3.127. Un électron se déplace dans un champ magnétique uniforme d'induction B. A la date $t = 0$, la vitesse de l'électron est $\mathbf{v}_0$ et fait un angle α avec la direction du champ.

Etablir l'équation de la trajectoire de l'électron sous la forme paramétrique (en prenant t comme paramètre). L'origine des coordonnées est placée au point où l'électron se trouvait à l'instant zéro; l'axe des z est dirigé le long de **B**; les axes des x et des y sont orientés de telle manière que le vecteur $\mathbf{v}_0$ se trouve dans le plan xz. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la trajectoire avec le plan yz.

3.128. Un faisceau légèrement divergent d'électrons monocinétiques dont la vitesse est $v = 6{,}0 \cdot 10^6$ m/s, est issu d'un certain point O situé dans un champ magnétique uniforme d'induction $B = 10{,}0$ mT. Le faisceau est dirigé suivant l'axe des x coïncidant avec la direction du champ. Déterminer la distance l du point O au point le plus proche F où se rencontrent les trajectoires de tous les électrons (le point de focalisation du faisceau).

3.129. Un électron se déplaçant dans un champ magnétique uniforme, décrit une hélice de diamètre $d = 80$ mm et de pas $l = 200$ mm. Calculer la vitesse de l'électron v. L'induction du champ est $B = 5{,}0$ mT.

3.130. Soient deux champs uniformes croisés **E** et **B** ($E \ll cB$). Dirigeons l'axe des y suivant le vecteur **E**, l'axe des z suivant le

vecteur B. Plaçons à l'origine des coordonnées une particule de masse m et de charge e' et abandonnons-la à elle-même sans vitesse initiale. Quel est le mouvement de la particule? Quelle est, en fonction du temps, la variation de la vitesse v de la particule?

3.131. Dans un dispositif analogue à celui à l'aide duquel Thomson a mesuré la charge spécifique de l'électron (fig. 141), un faisceau électronique peut dévier dans un sens vertical soit à l'aide du champ électrique de direction verticale, soit à l'aide du champ magnétique perpendiculaire à celui électrique. Les deux champs agissent sur

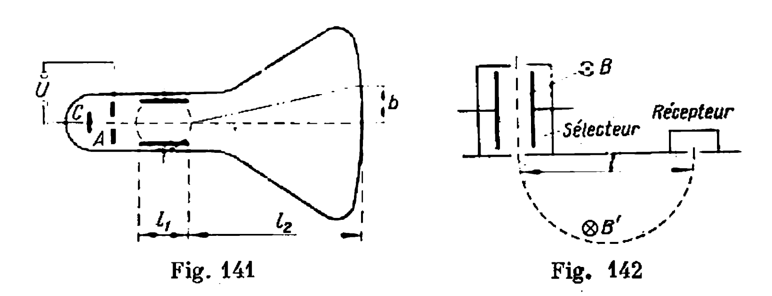


Fig. 141 Fig. 142

une longueur $l_1 = 50$ mm. La distance du système déflecteur à l'écran fluorescent est $l_2 = 175$ mm. Les électrons du faisceau sont accélérés par une tension $U = 500$ V appliquée entre la cathode C et l'anode A. Pour un certain champ déflecteur électrique la tache du faisceau sur l'écran se déplace de $b = 50$ mm. En branchant le champ déflecteur magnétique $B = 370$ µT on la fait revenir au point initial. En déduire la charge spécifique de l'électron.

3.132. Dans un spectromètre de masse de Bainbridge (fig. 142) la distance entre la fente de sortie du sélecteur de vitesses et la fente d'entrée du détecteur d'ions est $l = 400$ mm. L'induction magnétique $B' = B = 50{,}0$ mT. En faisant varier doucement l'intensité du champ électrique du sélecteur on observe les pointes de courant ionique dans le détecteur pour les valeurs $E_1 = 120$ V/cm et $E_2 = 160$ V/cm. Déterminer les poids atomiques A_{r1} et A_{r2} des ions à une charge correspondants. Identifier ces ions (indiquer à quel élément chimique ils correspondent).

3.133. Le diamètre intérieur des dées d'un cyclotron est $d = 1000$ mm. L'induction magnétique $B = 1{,}20$ T. La tension accélératrice $U = 100$ kV. Déterminer:

a) l'énergie maximale W que puissent acquérir les protons dans ce cyclotron et la vitesse v acquise par les protons à la fin d'accélération ;

b) la durée τ de l'accélération ;

c) la distance approximative s parcourue par les protons au bout de ce temps.

3.134. La valeur moyenne de l'induction magnétique $\langle B \rangle$ du champ créé par l'aimant d'un bétatron croît à peu près linéaire-

ment ; pendant le temps $\tau = 1{,}00$ ms elle varie de zéro à $B_1 = 200$ mT. Le rayon de l'orbite d'un électron est $r = 300$ mm. Déterminer :

a) la distance s parcourue par les électrons pendant la durée de l'accélération jusqu'à l'énergie $W = 50$ MeV ;

b) la vitesse des électrons v accélérés jusqu'à cette énergie.

Phénomènes électroniques

3.135. Dans une expérience analogue à celle de Tolman et Stewart la bobine de diamètre $d = 500$ mm portait $N = 400$ spires du fil de cuivre. La bobine était reliée par l'intermédiaire des balais, au galvanomètre balistique dont le zéro est au milieu de la graduation (fig. 143). La résistance totale de la bobine, du galvanomètre et des fils de connexion avait pour valeur $R = 50\,\Omega$. La bobine mise en rotation uniforme dans le sens de la flèche à raison de $n = 100$ tr/s était ensuite brusquement stoppée. Une charge $q = 11{,}0$ nC passait alors par le balistique occasionnant une déviation de l'aiguille du côté gauche. En déduire le signe et la valeur de la charge spécifique des porteurs d'électricité dans le cuivre.

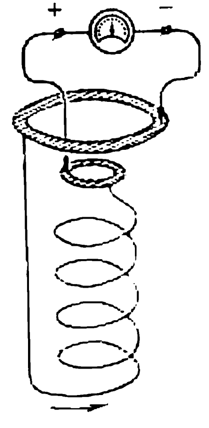


Fig. 143

3.136. Déterminer le travail d'extraction $e\varphi$ de l'électron d'un métal sachant que l'élévation de sa température de $\Delta T = 0{,}01$ K à partir de $T = 2000$ K occasionne l'augmentation du courant de saturation de l'émission thermoélectronique de 0,01 %.

3.137. Une plaque de cuivre est longue de $l = 60$ mm, large de $b = 20{,}0$ mm et épaisse de $a = 1{,}00$ mm (fig. 144). Lorsqu'on fait passer le courant d'intensité $i = 10{,}0$ A le long de la plaque on observe entre les points *1* et *2* la d.d.p. $U_{12} = 0{,}51$ mV, la d.d.p. entre les points *3* et *4* est nulle. Si, le courant n'étant pas coupé, on excite un champ magnétique uniforme, perpendiculaire à la plaque, d'induction $B = 100$ mT, il se crée alors entre les points *3* et *4* la d.d.p. $U_{34} = 0{,}055\ \mu$V. En déduire, pour le cuivre, la concentration des électrons libres n et leur mobilité u_0.

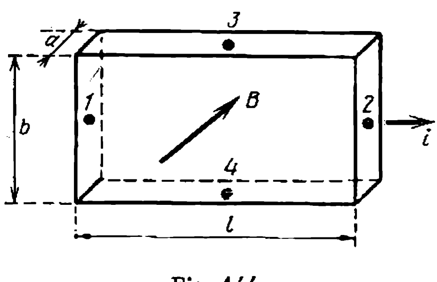


Fig. 144

3.138. Les électrodes d'un tube à deux électrodes (diode) sont reliées aux pôles d'une source de f.é.m. $\mathscr{E} = 10{,}0$ V. La cathode est en tungstène, l'anode en nickel. Déterminer l'énergie W acquise par

un électron parcourant la distance de la cathode à l'anode. La vitesse avec laquelle les électrons quittent la cathode est supposée nulle.

3.139. La fig. 145 représente une courbe expérimentale qui donne la conductivité électrique σ du silicium en fonction de l'inverse de la température absolue T. En déduire la largeur de la bande interdite ΔW pour le silicium.

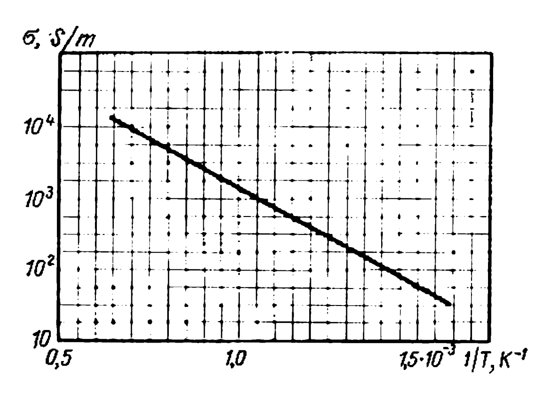


Fig. 145

3.140. Un tube à décharge contient un mélange d'hydrogène et d'hélium. Quel doit être le libre parcours λ d'un ion atomique d'hydrogène pour que celui-ci puisse exciter un atome d'hélium pendant la collision? Le champ dans le tube est supposé uniforme, d'intensité $E = 10,0$ V/cm. Le premier potentiel d'excitation de l'atome d'hélium est $\varphi_1 = 21,4$ V.

Oscillations et ondes électromagnétiques

3.141. Un contour fermé en forme d'un cadre d'aire $S = 60,0$ cm² tourne uniformément dans un champ magnétique uniforme d'induction $B = 20,0$ mT en faisant $n = 20,0$ tours par seconde. L'axe de rotation est perpendiculaire à la direction du champ. Déterminer les valeurs maximale $\mathscr{E}_m$ et efficace $\mathscr{E}$ de la f.é.m. dans le contour.

3.142. Un circuit alimenté en courant alternatif comprend, montées en série, une résistance morte $R = 800\,\Omega$, une self $L = 1,27$ H et une capacité $C = 1,59$ μF. On applique aux bornes du circuit une tension de valeur efficace $U = 127$ V et de fréquence 50 Hz. Déterminer:

a) l'intensité efficace I du courant dans le circuit;

b) le déphasage φ entre le courant et la tension;

c) les tensions efficaces U_R, U_L et U_C aux bornes de chaque élément du circuit;

d) la puissance W, dissipée dans le circuit.

3.143. Une tension alternative de valeur efficace $U = 220$ V et de fréquence $\nu = 50$ Hz s'applique aux bornes d'une bobine sans noyau d'inductance $L = 31{,}8$ mH et de résistance morte $R = 10{,}0\ \Omega$.

1. Déterminer la quantité de chaleur Q dégagée dans la bobine par seconde.

2. Comment change Q si l'on montait en série avec la bobine une capacité $C = 31{,}9\ \mu$F?

3.144. Aux bornes du circuit représenté fig. 146 s'applique une tension alternative de valeur efficace $U = 220$ V et de fréquence $\nu = 50$ Hz. La résistance morte du circuit est $R = 22\ \Omega$, l'inductance $L = 318$ mH. La capacité du circuit est choisie telle que l'indication du voltmètre monté en parallèle avec L soit maximale. Déterminer, dans ces conditions, les indications du voltmètre U_1 et de l'ampèremètre I. On néglige la résistance totale de l'ampèremètre ainsi que la fraction du courant passant par la portion du circuit avec le voltmètre.

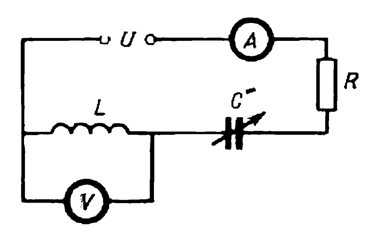


Fig. 146

3.145. Aux bornes A et B d'un circuit représenté fig. 147 est appliquée une tension alternative de valeur efficace $U = 220$ V. La capacité du circuit $C = 1{,}00\ \mu$F, l'inductance $L = 1{,}00$ mH, la résistance morte $R = 0{,}100\ \Omega$. Pour quelle valeur de la pulsation ω l'intensité du courant traversant la section *1* sera minimale? Quelles seront, à cette pulsation, les intensités efficaces I_1, I_2 et I_3 des courants traversant les sections *1*, *2* et *3*?

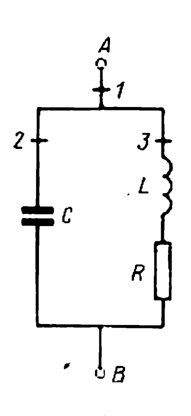


Fig. 147

3.146. Un circuit oscillant d'un poste radio comprend une bobine d'inductance $L = 1{,}00$ mH et un condensateur réglable dont la capacité peut varier dans l'intervalle entre 9,7 et 92 pF. Déterminer la gamme d'ondes des stations captées par ce poste.

3.147. La résistance d'un circuit oscillant est $R = 0{,}33\ \Omega$. Quelle puissance W doit-on fournir au circuit pour y entretenir les oscillations non amorties dont l'amplitude de l'intensité de courant $I_m = 30$ mA?

3.148. Paramètres d'un circuit oscillant: $C = 1{,}00$ nF, $L = 6{,}00\ \mu$H, $R = 0{,}50\ \Omega$. Quelle puissance W est nécessaire pour entretenir dans le circuit les oscillations non amorties telles que l'amplitude de la tension sur le condensateur $U_m = 10{,}0$ V?

3.149. Paramètres d'un circuit oscillant: $C = 4{,}00\ \mu$F, $L = 0{,}100$ mH, $R = 1{,}00\ \Omega$. Quel est le facteur de qualité du circuit Q? Quelle erreur relative commet-on en calculant le facteur de qualité

à l'aide de la formule approchée

$$Q = \frac{R}{1}\sqrt{\frac{L}{C}}\ ?$$

3.150. Le facteur de qualité d'un circuit oscillant Q est égal à 10,0. Déterminer de combien de p.cent la pulsation des oscillations libres du circuit ω diffère-t-elle de la pulsation propre du circuit ω_0? (Calculer $(\omega_0 - \omega)/\omega_0$.)

3.151. La fréquence propre des oscillations d'un circuit oscillant $\nu_0 = 8{,}0$ kHz ; le facteur de qualité du circuit $Q = 72$. Le circuit est le siège des oscillations amorties. Déterminer, en fonction du temps t, la diminution de l'énergie W emmagasinée dans le circuit. Quelle partie de l'énergie initiale W_0 reste-t-il dans le circuit au bout du temps $\tau = 1{,}00$ ms?

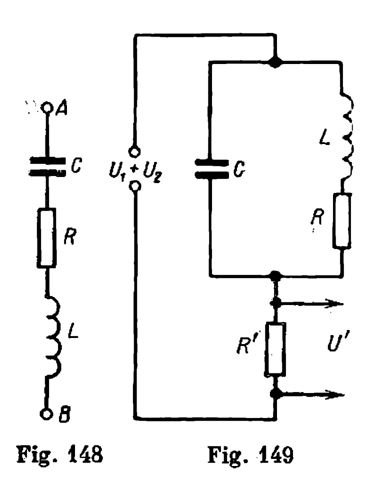


Fig. 148 Fig. 149

3.152. Quel doit être le facteur de qualité Q du circuit pour que la fréquence correspondant à la résonance de courant ne diffère pas de celle de la résonance de tension plus de 1 % ?

3.153. La capacité du circuit représenté fig. 148 $C = 1{,}00$ nF, l'inductance $L = 1{,}00$ mH. On applique aux bornes A et B simultanément deux tensions alternatives de même amplitude mais de pulsations différentes : la pulsation de la première tension coïncide avec la pulsation propre du circuit ω_0, celle de la deuxième tension la dépasse de 10 % ($\omega = 1{,}10\ \omega_0$).

Déterminer le rapport des amplitudes des courants excités dans le circuit par les deux tensions (I_1/I_2) dans les cas où :

a) le facteur de qualité du circuit $Q = 100$;

b) le facteur $Q = 10$.

3.154. Le montage de la fig. 149 comprend un circuit oscillant de capacité $C = 1{,}00$ nF et d'inductance $L = 1{,}00$ mH et une résistance $R' = 10{,}0\ \Omega$ montés en série. On applique aux bornes du montage simultanément deux tensions de la même valeur $U_1 = U_2 = 10{,}0$ V mais de pulsations différentes. La pulsation de la première tension coïncide avec la pulsation de résonance du circuit ω_r, celle de la seconde tension ω la dépasse de 10 % ($\omega = 1{,}10\ \omega_r$). Déterminer les valeurs des tensions U'_1 et U'_2 sur les bornes de la résistance R' dans les cas où :

a) le facteur de qualité du circuit oscillant $Q = 100$;

b) le facteur $Q = 10$.

3.155. Une onde électromagnétique plane se propage dans un milieu à $\varepsilon = 4{,}00$ et $\mu = 1{,}00$. L'amplitude du vecteur électrique

de l'onde E_m — 200 V/m. L'onde rencontre une surface absorbante, demi-sphère de rayon $r = 300$ mm, orientée par son sommet du côté de la propagation de l'onde. Quelle énergie W absorbe cette surface pendant le temps $t = 1{,}00$ mn?

3.156. Une onde électromagnétique émise par un dipôle se propage dans le vide. L'amplitude de l'intensité du champ électrique dans la zone d'onde sur le rayon perpendiculaire à l'axe du dipôle à la distance $r = 1{,}00$ m de ce dernier, $E_m = 10{,}0$ V/m. Calculer la puissance de rayonnement dipolaire I (i.e. l'énergie émise par le dipôle dans toutes les directions par unité de temps).

PARTIE 4

OPTIQUE

Photométrie et optique géométrique

4.1. Déterminer à l'aide de la courbe d'efficacité lumineuse (fig. 150):

a) le flux d'énergie correspondant au flux lumineux monochromatique de 1,00 lm avec les longueurs d'onde 0,51 et 0,64 μ;

b) le flux lumineux pour une bande d'ondes de 0,58 à 0,63 μ si le flux d'énergie correspondant $\Phi_e = 4{,}5$ mW, ce dernier étant uniformément distribué sur toutes les longueurs d'onde de la bande

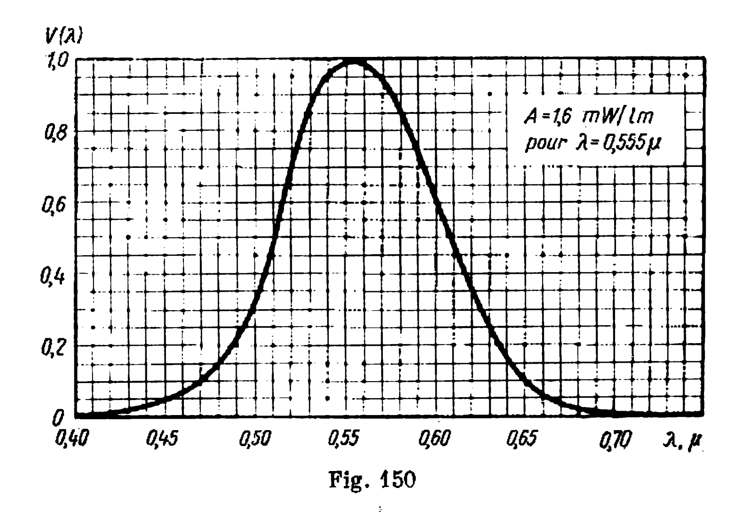


Fig. 150

indiquée (on admet que la fonction d'efficacité lumineuse est une fonction linéaire de la longueur d'onde dans la bande spectrale donnée).

4.2. Une source isotrope ponctuelle émet un flux lumineux $\Phi =$ $= 10$ lm de longueur d'onde $\lambda = 0{,}59$ μ. Déterminer les amplitudes des vecteurs champ électrique et champ magnétique de ce flux lumineux à la distance $r = 1{,}0$ m de la source. Se servir de la courbe d'efficacité lumineuse (voir fig. 150).

4.3. Déterminer l'éclairement moyen de la partie éclairée d'une sphère opaque si celle-ci est éclairée:

a) par un flux lumineux parallèle qui crée au point d'incidence normale un éclairement E_0;

b) par la lumière venant d'une source isotrope ponctuelle située à la distance $l = 100$ cm du centre de la sphère; rayon de la sphère $r = 60$ cm, intensité lumineuse $I = 36$ cd.

4.4. Montrer que la brillance d'une source dans une direction donnée est $B_\vartheta = E/\Omega$, où E est l'éclairement d'un élément de surface disposé perpendiculairement à la direction donnée, Ω, l'angle solide sous lequel est vu l'élément émetteur de la source depuis cet élément de surface.

4.5. Une certaine surface lumineuse obéit à la loi de Lambert. Sa brillance est B. Déterminer:

a) le flux lumineux émis par un élément ΔS de cette surface dans un cône dont l'axe est normal à cet élément et dont le demi-angle d'ouverture est ϑ;

b) la brillance de cette source.

4.6. Au-dessus du centre d'une table ronde de rayon $r = 1{,}0$ m est placée une source lumineuse en forme d'un disque plan horizontal d'aire $S = 100$ cm². La brillance de la source $B = 1{,}6 \cdot 10^4$ cd/m² est indépendante de la direction. A quelle hauteur h au-dessus de la surface de la table faut-il placer la source pour que l'éclairement en des points périphériques de la table soit maximal? Quel est cet éclairement?

4.7. Au-dessus du centre d'une table ronde de rayon $r = 1{,}0$ m est suspendue, à la hauteur $h = 1{,}0$ m de ce dernier, une source ponctuelle dont l'indicatrice $I(\vartheta)$ assure un éclairement uniforme de tous les points de la table (I est l'intensité lumineuse, ϑ, l'angle que fait le rayon avec la verticale). Etablir la forme de la fonction $I(\vartheta)$ ainsi que le flux lumineux intercepté par la table si $I(0) = I_0 = 100$ cd.

4.8. Un pinceau lumineux vertical éclaire le centre du plafond d'une chambre ronde non éclairée de rayon $r = 2{,}0$ m. Il se forme, sur le plafond, une tache lumineuse d'aire $S = 100$ cm². Eclairement de la tache $E = 1000$ lx; facteur de réflexion du plafond $\rho = 0{,}80$. Déterminer l'éclairement maximal du mur par la lumière réfléchie par le plafond. On suppose que la réflexion suive la loi de Lambert.

4.9. Une coupole lumineuse uniforme ayant la forme d'un hémisphère s'appuie sur un plan horizontal. Déterminer l'éclairement du centre du plan si la brillance de la coupole est B et ne dépend pas de la direction.

4.10. Une source obéissant à la loi de Lambert représente un plan indéfini. Sa brillance est B. Déterminer l'éclairement d'un élément de surface parallèle à cette source.

4.11. Une source lumineuse en forme d'un disque horizontal plan de rayon $r_0 = 25$ cm se trouve au-dessus d'une table à la hauteur $h = 75$ cm de celle-ci. L'éclairement de la table au-dessous du

centre de la source $E_0 = 70$ lx. Trouver la luminosité de cette source en la supposant obéissant à la loi de Lambert.

4.12. Une source en forme d'une sphère lumineuse uniforme de rayon $r_0 = 6{,}0$ cm est placée à la hauteur $h = 3{,}0$ m au-dessus du plancher. La brillance de la source $B = 2{,}0 \cdot 10^4$ cd/m² est indépendante de la direction. Déterminer l'éclairement du plancher juste au-dessous de la source.

4.13. Ecrire sous forme vectorielle la loi de réflexion d'un rayon lumineux par un miroir en recourant aux vecteurs unités $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$, menés dans les directions des rayons incident et réfléchi, et au vecteur unité $\mathbf{n}$ de la normale à la surface du miroir.

4.14. Montrer qu'un rayon lumineux réfléchi successivement par trois miroirs plans orthogonaux change sa direction à l'opposée.

4.15. Pour quel angle d'incidence le rayon réfléchi par la surface de l'eau sera-t-il perpendiculaire au rayon réfracté?

4.16. Soit une surface plane de séparation de deux milieux optiques. Soit $i_{1_{\text{lim}}}$ l'angle limite d'incidence et i_1 l'angle d'incidence pour lequel le rayon réfracté est perpendiculaire à celui réfléchi (la lumière se propage de milieu optiquement plus dense). Déterminer l'indice de réfraction relatif de ces milieux étant donné que $\sin i_{1_{\text{lim}}}/\sin i_1 = \eta = 1{,}28$.

4.17. Un rayon lumineux traverse une lame à faces planes parallèles d'épaisseur $d = 6{,}0$ cm. L'angle d'incidence $i = 60°$. Déterminer le décalage latéral subi par le rayon.

4.18. Un opérateur debout sur le bord d'une piscine observe une pierre reposant sur le fond. La profondeur de la piscine est h. A quelle distance de la surface de l'eau se trouve l'image de la pierre si le rayon visuel fait un angle i avec la normale à la surface de l'eau?

4.19. Montrer qu'un prisme de faible angle réfringent ϑ fait dévier un rayon d'un angle $\alpha \approx (n-1)\,\vartheta$ indépendamment de l'angle d'incidence pourvu que celui-ci soit également petit.

4.20. Un rayon lumineux attaque un prisme d'angle réfringent ϑ et d'indice n. Soit α l'angle de déviation du rayon. Montrer que lors du passage symétrique du rayon à travers le prisme:

a) l'angle α est minimal;

b) $n \sin \frac{\vartheta}{2} = \sin \frac{\vartheta+\alpha}{2}$.

4.21. Pour un certain prisme de verre, l'angle de déviation minimale du rayon lumineux est égal à l'angle réfringent. Déterminer ce dernier.

4.22. Déterminer l'intervalle de variation de l'angle de déviation d'un rayon traversant un prisme de verre d'angle réfringent $\vartheta = 60°$.

4.23. Un prisme triangulaire d'angle réfringent 60° est caractérisé, dans l'air, par un angle de déviation minimale 37°. Quel angle de déviation minimale assure ce prisme dans l'eau?

4.24. Un rayon lumineux contenant deux composantes monochromatiques traverse un prisme triangulaire d'angle réfringent $\vartheta = 60°$. Déterminer l'angle $\Delta\varphi$ que font entre elles les deux composantes

ayant traversé le prisme si leurs indices sont 1,515 et 1,520 et le prisme est orienté sous l'angle de déviation minimale.

4.25. En partant du principe de Fermat établir les lois de réflexion et de réfraction de la lumière par la surface plane de séparation de deux milieux.

4.26. Déterminer par construction:

a) la marche du rayon réfléchi par les miroirs concave et convexe (fig. 151 où F est le foyer, OO' l'axe optique);

b) les positions du miroir et de son foyer dans les cas donnés à la fig. 152 où P et P' sont les points conjugués.

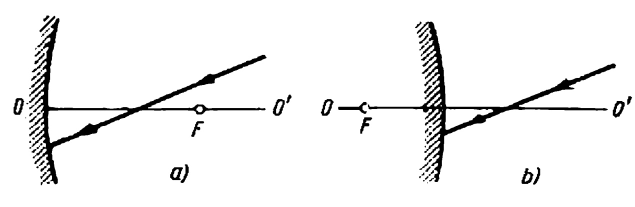


Fig. 151

4.27. Déterminer la distance focale d'un miroir concave étant donné que:

a) le grandissement transversal est $\beta = -2{,}0$ pour la distance entre l'objet et l'image $l = 15$ cm;

b) pour une position de l'objet le grandissement transversal $\beta_1 = -0{,}50$ et pour une autre position déplacée de $l = 5{,}0$ cm par rapport à la première, le grandissement transversal $\beta_2 = -0{,}25$.

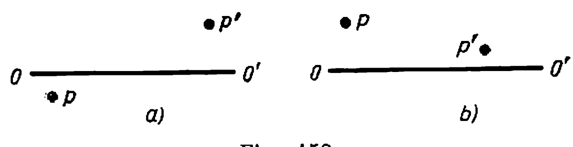


Fig. 152

4.28. Une source ponctuelle d'intensité lumineuse $I_0 = 100$ cd est placée à la distance $s = 20{,}0$ cm du sommet d'un miroir concave de distance focale $f = 25{,}0$ cm. Déterminer l'intensité lumineuse du faisceau réfléchi, le facteur de réflexion du miroir étant $\rho = 0{,}80$.

4.29. En partant du principe de Fermat établir la formule de la réfraction des rayons paraxiaux sur une surface sphérique de rayon R de séparation de deux milieux d'indices n et n'.

4.30. Un faisceau lumineux parallèle tombe du vide sur une surface limitant un domaine d'indice n (fig. 153). Etablir la forme de cette surface, i.e. l'équation $x(r)$, telle que le faisceau converge au point F situé à la distance f du sommet O. Quel est le rayon maximal du faisceau qui puisse encore converger?

4.31. Une source ponctuelle est située à la distance de 20 cm de la face avant d'une lentille de verre symétrique biconvexe. L'épaisseur de la lentille est 5,0 cm, le rayon de courbure des surfaces est 5,0 cm. A quelle distance de la face arrière de la lentille se forme l'image de la source?

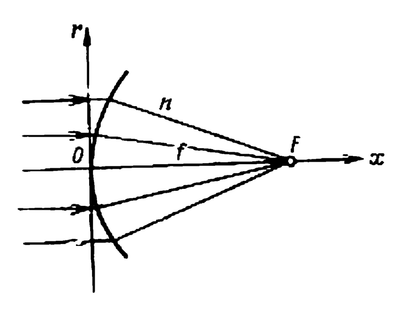


Fig. 153

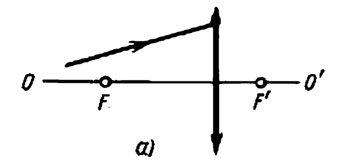
4.32. Un objet est placé devant la face convexe d'une lentille de verre convexe-plan d'épaisseur $d = 9,0$ cm. L'image en est formée sur la face plane de la lentille qui sert d'écran. Déterminer :

a) le grandissement transversal étant donné le rayon de courbure de la face convexe de la lentille $R = 2,5$ cm ;

b) l'éclairement de l'image, la brillance de l'objet étant $B = 7700$ cd/m² et le diamètre d'ouverture d'entrée de la face convexe $D = 5,0$ mm.

4.33. Déterminer la puissance et la distance focale pour :

a) une mince lentille en verre placée dans un liquide d'indice $n_0 = 1,7$, sa puissance dans l'air étant $\Phi_0 = -5,0\,\delta$;



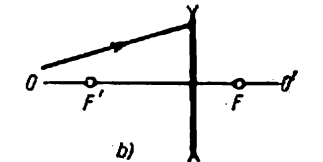


Fig. 154

b) une mince lentille en verre symétrique et biconvexe ($n = 1,50$), l'une des faces de laquelle est baignée par l'air et l'autre par l'eau, sa puissance dans l'air étant $\Phi_0 = +10\,\delta$.

4.34. Déterminer par construction :

a) la marche du rayon sorti des lentilles minces convergente et divergente (fig. 154, où OO' est l'axe optique principal, F et F' foyers avant et arrière) ;

b) la position d'une lentille mince et de ses foyers sachant la position de l'axe optique principal OO' et celle d'un couple de points conjugués PP' (voir fig. 152) ; le milieu est le même de part et d'autre de la lentille ;

c) la marche du rayon *2* sorti des lentilles minces convergente et divergente (fig. 155), sachant la position de la lentille et celle de l'axe principal OO' et la marche du rayon *1* ; de part et d'autre de la lentille le milieu est le même.

4.35. Une lentille mince convergente de distance focale $f = 25$ cm donne l'image d'un objet sur un écran qui se trouve à la distance

$l = 5{,}0$ m de la lentille. On approche l'écran de la lentille de $\Delta l =$ $= 18$ cm. De combien faut-il déplacer l'objet pour en obtenir de nouveau une image nette sur l'écran?

4.36. Une source lumineuse se trouve à la distance $l = 90$ cm d'un écran. Une lentille mince convergente placée entre la source lumineuse et l'écran fournit des images nettes pour deux positions. Déterminer la distance focale de la lentille étant donné que:

a) la distance des deux positions de la lentille $\Delta l = 30$ cm;

b) les dimensions transversales de l'image pour une position de la lentille sont $\eta = 4{,}0$ fois supérieures à celles pour l'autre position.

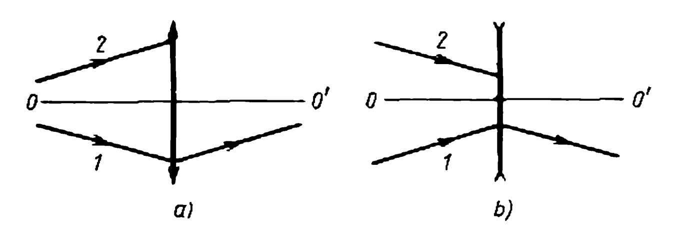


Fig. 155

4.37. Entre l'objet et l'écran, dont les positions sont fixes, est placée une lentille mince convergente. En déplaçant la lentille on trouve deux positions pour lesquelles l'image sur l'écran est nette. Déterminer la dimension transversale de l'objet sachant que la dimension de l'image pour une position de la lentille est $h' = 2{,}0$ mm et pour l'autre $n'' = 4{,}5$ mm.

4.38. Une lentille mince, convergente, d'ouverture relative $D : f = 1 : 3{,}5$ (D est le diamètre de la lentille, f sa distance focale), fournit l'image d'un objet suffisamment éloigné sur une plaque photographique. La brillance de l'objet est $B = 260$ cd/m². Les pertes de la lumière dans la lentille constituent $\alpha = 0{,}10$. Déterminer l'éclairement de l'image.

4.39. Comment varie en fonction du diamètre D d'une lentille mince convergente la brillance d'une image réelle:

a) observée directement;

b) que l'on observe sur un écran diffusant d'après la loi de Lambert?

4.40. On a deux lentilles minces symétriques: l'une convergente d'indice $n_1 = 1{,}70$, l'autre divergente de $n_2 = 1{,}51$. Les faces des deux lentilles ont même rayon de courbure $R = 10$ cm. Les lentilles sont accolées et placées dans l'eau. On demande la distance focale du système dans l'eau.

4.41. Un miroir sphérique concave représente une lentille de verre mince, symétrique biconvexe dont l'une des surfaces est argentée. En déterminer la distance focale, étant donné que le rayon de courbure de la surface de la lentille $R = 40$ cm.

4.42. Un système centré composé de trois lentilles minces placé dans l'air est représenté fig. 156. Il est à déterminer :

a) le point vers lequel converge un faisceau de rayons parallèles après avoir traversé le système de gauche à droite ;

b) la distance de la première lentille au point situé sur l'axe à gauche du système telle que ce point et son image soient symétriques par rapport au système.

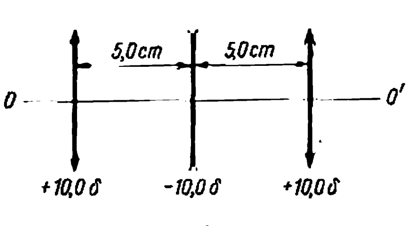


Fig. 156

4.43. Une lunette de Galilée de grossissement 10, réglée pour l'infini, possède une longueur de 45 cm. Déterminer :

a) les distances focales de l'objectif et de l'oculaire de la lunette ;

b) la distance dont il faut déplacer l'oculaire de la lunette pour voir nettement les objets situés à la distance de 50 m.

4.44. Déterminer le grossissement d'une lunette du type lunette de Kepler réglée pour l'infini étant donné que le diamètre de la monture de son objectif est D, alors que celui de l'image de cette monture donnée par l'oculaire est d.

4.45. L'intensité d'un flux lumineux ayant traversé une lunette augmente de $\eta = 4{,}0 \cdot 10^4$ fois. Déterminer la dimension angulaire d'un objet éloigné sachant que la dimension angulaire de son image donnée par la lunette est $u' = 2{,}0°$.

4.46. Une lunette du type lunette de Kepler de grossissement $\Gamma = 15$ est immergée dans l'eau de manière que l'eau remplisse l'intérieur de la lunette. Le système redevient télescopique lorsqu'on remplace son objectif par un autre. Quel devient alors le grossissement de la lunette dans l'eau? Indice du verre de l'oculaire $n = 1{,}50$.

4.47. Quel doit être le grossissement Γ d'une lunette doté d'un objectif de diamètre $D = 6{,}0$ cm assurant un éclairement de l'image d'un objet sur la rétine aussi grand qu'à l'œil nu? Le diamètre de la pupille de l'œil est posé égal à $d_0 = 3{,}0$ mm. Les pertes de lumière dans la lunette sont négligeables.

4.48. Les puissances de l'objectif et de l'oculaire d'un microscope sont respectivement 100 et 20 δ. Le grossissement de l'appareil est 50. Calculer le grossissement de ce microscope si la distance entre l'objectif et l'oculaire est augmentée de 2,0 cm.

4.49. On dispose d'un microscope d'ouverture numérique $\sin u = 0{,}12$, où u est le demi-angle du cône des rayons incidents sur la monture de l'objectif. En posant le diamètre de la pupille de l'œil $d_0 = 4{,}0$ mm déterminer le grossissement du microscope tel que :

a) le diamètre du faisceau lumineux sorti du microscope est égal à celui de la pupille de l'œil ;

b) l'éclairement de l'image rétinienne est indépendant du grossissement (traiter le cas où le faisceau lumineux traversant le système « microscope-œil » est limité par la monture de l'objectif).

4.50. Déterminer les positions des plans principaux, des foyers et des points nodaux d'une mince lentille de verre biconvexe et symétrique dont les faces ont le rayon de courbure $R = 7{,}50$ cm, à condition qu'une face soit baignée par l'air et l'autre par l'eau.

4.51. Déterminer par construction les positions des foyers et des plans principaux pour les systèmes optiques centrés représentés fig. 157 :

a) un téléobjectif, système constitué par deux lentilles minces convergente et divergente ($f_1 = 1{,}5\ a$, $f_2 = -1{,}5\ a$) ;

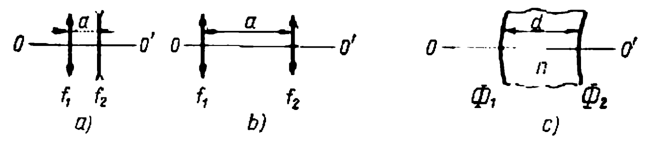


Fig. 157

b) deux lentilles minces convergentes ($f_1 = 1{,}5\ a$, $f_2 = 0{,}5\ a$) ;

c) une lentille épaisse convexe-concave ($d = 4$ cm, $n = 1{,}5$, $\Phi_1 = +50\,\delta$, $\Phi_2 = -50\,\delta$).

4.52. Un système optique se trouve dans l'air. Soit OO' son axe principal, F et F' ses foyers objet et image, H et H' les plans principaux objet et image, P et P' les points conjugués. Déterminer par construction :

a) la position de F' et de H' (fig. 158, a) ;

b) la position du point S' conjugué du point S (fig. 158,b) ;

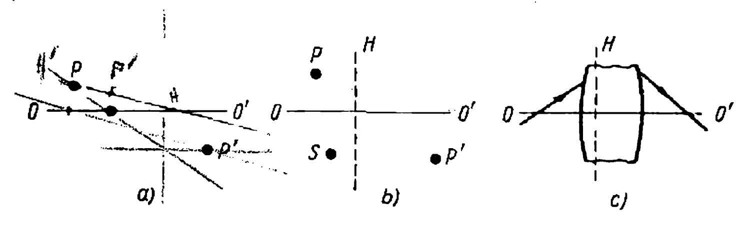


Fig. 158

c) la position de F, F' et de H' (cf. fig. 158, c où est indiquée la marche du rayon incident et émergent).

4.53. Soient F et F' les foyers objet et image d'un système optique, H et H' ses points principaux objet et image. Construire la position de l'image S' d'un point S pour les dispositions relatives suivantes des points S, F, F', H et H' :

a) $FSHH'F'$;

b) $HSF'FH'$;

c) $H'SF'FH$;

d) $F'H'SHF$.

4.54. Un téléobjectif se compose de deux lentilles minces dont la lentille avant est convergente et celle arrière divergente de puissances respectives $\Phi_1 = +10\,\delta$ et $\Phi_2 = -10\,\delta$. Déterminer:

a) la distance focale et la position des plans principaux de ce système, la distance entre lentilles étant $d = 4{,}0$ cm;

b) la distance d entre lentilles telle que le rapport de la distance focale f du système à la distance l entre la lentille convergente et le foyer image principal soit maximal. Valeur de ce rapport?

4.55. Calculer les positions des plans principaux et des foyers d'une lentille de verre épaisse convexo-concave, le rayon de courbure de la face convexe étant $R_1 = 10{,}0$ cm, celui de la face concave $R_2 = 5{,}0$ cm et l'épaisseur de la lentille $d = 3{,}0$ cm.

4.56. Un système centré se compose de deux lentilles minces de distances focales f_1 et f_2, la distance entre lentilles étant d. On demande de le remplacer par une seule lentille mince telle qu'elle donne pour toute position de l'objet le même grandissement transversal que le système précédent. Quelle doit être la distance focale de cette lentille et la position de celle-ci par rapport au système de deux lentilles?

4.57. Un système optique se compose d'une mince lentille de verre, symétrique et convergente, dont les faces ont le rayon de courbure $R = 38$ cm, et d'un miroir plan perpendiculaire à l'axe optique principal de la lentille. La distance entre la lentille et le miroir $l = 12$ cm. Quelle sera la puissance de ce système si l'on remplit d'eau l'espace entre la lentille et le miroir?

4.58. Pour quelle épaisseur une lentille en verre convexo-concave:

a) devient télescopique, le rayon de courbure de sa face convexe étant supérieur à celui de la face concave de $\Delta R = 1{,}5$ cm?

b) aura la puissance $-1{,}0\,\delta$, les rayons de courbures de ses faces convexe et concave étant respectivement de 10,0 et de 7,5 cm?

4.59. Déterminer la position des plans principaux, la distance focale et le signe de la puissance d'une lentille épaisse en verre convexo-concave possédant:

a) une épaisseur d et les faces de même rayon de courbure égal à R;

b) les surfaces concentriques de rayons de courbures R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$).

4.60. Un système télescopique se compose de deux sphères de verre de rayons $R_1 = 5{,}0$ cm et $R_2 = 1{,}0$ cm. Calculer la distance entre les centres de ces sphères et le grossissement du système, l'objectif étant constitué par la plus grande sphère?

4.61. On a deux lentilles épaisses biconvexes symétriques accolées. L'épaisseur de chaque lentille d est égale au rayon de courbure des faces, $d = R = 3{,}0$ cm. Déterminer la puissance de ce système dans l'air.

4.62. Lorsque la lumière se propage dans un milieu isotrope dont l'indice de réfraction n varie lentement d'un point à l'autre, le rayon

de courbure ρ d'un rayon lumineux est donné par la formule

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\partial}{\partial N}(\ln n),$$

où la dérivée est prise dans la direction de la normale principale au rayon. Déduire cette formule étant donné qu'un tel milieu vérifie la loi de réfraction $n \sin i = \text{const}$, où i est l'angle que fait le rayon lumineux avec la direction de grad n au point donné.

4.63. Déterminer le rayon de courbure d'un rayon lumineux se propageant dans la direction horisontale au voisinage de la surface de la Terre où le gradient d'indice de réfraction de l'air est approximativement égal à $3 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^{-1}$. Pour quelle valeur du gradient le rayon lumineux se propagerait-il suivant une circonférence autour de la Terre?

Interférence de la lumière

4.64. Montrer que lors de la superposition de deux vibrations harmoniques, l'intensité de la vibration résultante, moyenne dans le temps, est égale à la somme de leurs intensités, si:

a) les deux vibrations ont la même direction mais sont incohérentes, toutes les valeurs de déphasage étant équiprobables;

b) les deux vibrations sont orthogonales, de même fréquence et admettent un déphasage arbitraire.

4.65. Déterminer par méthode de Fresnel l'amplitude d'une vibration, somme de trois vibrations de même direction suivantes:

$$\xi_1 = a\cos\omega t,\quad \xi_2 = 2a\sin\omega t,\quad \xi_3 = 1{,}5a\cos(\omega t+\pi/3).$$

4.66. Une certaine vibration résulte de la superposition de N vibrations cohérentes, de même direction, de la forme: $\xi_k = a\cos[\omega t + (k-1)\vartheta]$, où k est le numéro de la vibration ($k = 1, 2, \ldots, N$), ϑ, le déphasage entre k-ème et $(k-1)$-ème vibrations. Déterminer l'amplitude de la vibration résultante.

4.67. Un système (fig. 159) se compose de deux sources ponctuelles cohérentes *1* et *2* disposées dans le plan P qui vibrent dans une direction perpendiculaire à ce plan. La distance des sources est d, la longueur d'onde de la vibration λ. Les vibrations de la source *2* sont en retard de phase φ sur les vibrations de la source *1*. Déterminer:

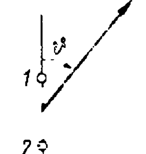


Fig. 159

a) les angles ϑ déterminant les directions suivant lesquelles l'intensité du rayonnement est maximale;

b) les conditions dans lesquelles l'intensité est maximale dans la direction $\vartheta = \pi$ et minimale dans la direction opposée.

4.68. Un système émetteur fixe se compose d'une série de vibrateurs parallèles disposés en ligne droite, distants l'un de l'autre de d, la phase des vibrations variant linéairement le long de la série de vibrateurs. Déterminer en fonction du temps le déphasage $\Delta\varphi$

des vibrateurs voisins tel que le maximum principal de rayonnement du système effectue le balayage circulaire de la région à la vitesse angulaire constante ω.

4.69. Dans une expérience de Lloyd (fig. 160), une onde lumineuse provenant directement de la source S (une fente étroite) interfère avec l'onde réfléchie par le miroir M. Il en résulte les franges d'interférence sur l'écran E. La distance de la source à l'écran est $l = 100$ cm. La largeur d'une frange d'interférence est $\Delta x = 0{,}25$ mm

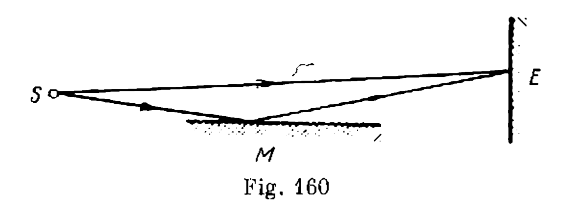


Fig. 160

pour une position de la source; une fois la source S éloignée du plan du miroir de $\Delta h = 0{,}60$ mm, cette largeur a diminué de $\eta = 1{,}5$ fois. Déterminer la longueur d'onde lumineuse.

4.70. Deux ondes planes cohérentes, dont les directions de propagation font entre elles un angle $\alpha \ll 1$, tombent en incidence presque normale sur un écran. Les ondes ont la même amplitude. En écrivant les équations des deux ondes et en les additionnant ensuite, montrer que la distance des maxima voisins sur l'écran est $\Delta x = \lambda/\alpha$, où λ est la longueur d'onde.

4.71. La figure 161 reproduit l'expérience d'interférence avec les miroirs de Fresnel. Les miroirs font entre eux un angle $\alpha = 12'$,

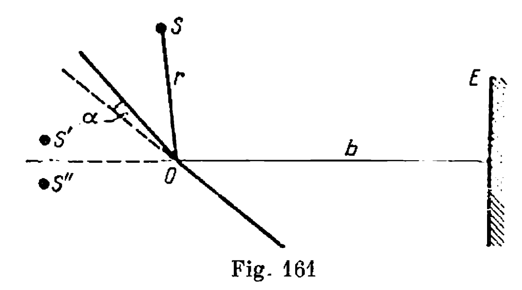


Fig. 161

les distances de l'arête commune des miroirs à la fente étroite S et l'écran E sont respectivement $r = 10{,}0$ cm et $b = 130$ cm. La longueur d'onde de la lumière $\lambda = 0{,}55\ \mu$. Déterminer:

a) la largeur d'une frange sur l'écran et le nombre de maxima;

b) le déplacement de l'image d'interférence sur l'écran lorsque la fente S se déplace de $\delta l = 1{,}0$ mm suivant un arc de rayon r centré en O;

c) l'épaisseur maximale de la fente δ_{max} telle que les franges soient encore nettes sur l'écran.

4.72. Une onde lumineuse plane tombe sur les miroirs de Fresnel qui font entre eux un angle $\alpha = 2{,}0'$. Déterminer la longueur d'onde de la lumière, la largeur de la frange sur l'écran étant $\Delta x = 0{,}55$ mm.

4.73. Une lentille de diamètre 5,0 cm et de distance focale $f = 25{,}0$ cm est sciée suivant le diamètre en deux parties identiques, l'épaisseur de la couche enlevée étant $a = 1{,}00$ mm. On rapproche ensuite les deux parties jusqu'à ce qu'elles se touchent et l'on place dans le plan focal de la bilentille ainsi formée une fente étroite émettant une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0{,}60$ μ. Derrière la bilentille, à la distance $b = 50$ cm, on dispose un écran. Déterminer:

a) la largeur d'une frange sur l'écran et le nombre de maxima;

b) la largeur maximale de la fente δ_{max} telle que les franges soient encore nettes.

4.74. Les distances du biprisme de Fresnel à une fente étroite et à un écran sont respectivement $a = 25$ cm et $b = 100$ cm. Le biprisme est en verre, son angle réfringent $\vartheta = 20'$. La largeur d'une frange d'interférence sur l'écran étant $\Delta x = 0{,}55$ mm, calculer la longueur d'onde lumineuse.

4.75. Une onde lumineuse plane de $\lambda = 0{,}70$ μ attaque normalement la base d'un biprisme de verre ($n = 1{,}520$) dont l'angle réfringent est $\vartheta = 5{,}0°$. Derrière le biprisme est placée une lame de verre à faces planes parallèles (fig. 162). L'espace entre le biprisme et la lame est rempli de benzène ($n' = 1{,}500$). Déterminer la largeur d'une frange d'interférence sur l'écran E disposé derrière ce système.

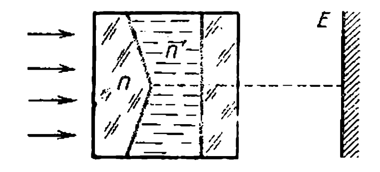


Fig. 162

4.76. Une onde lumineuse plane monochromatique attaque, suivant une normale, un diaphragme à deux fentes étroites distantes

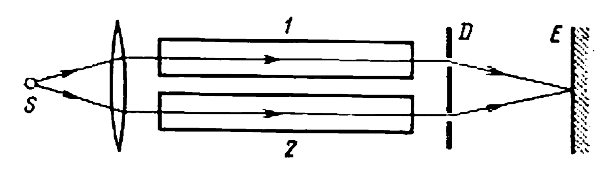


Fig. 163

l'une de l'autre de $d = 2{,}5$ mm. On observe un système de franges d'interférence sur un écran placé à la distance $l = 100$ cm derrière le diaphragme. On introduit une lame de verre d'épaisseur $h = 10$ μ devant une fente. De quelle distance et dans quel sens les franges se déplaceront-elles?

4.77. La fig. 163 donne le schéma d'un interféromètre destiné à mesurer les indices de réfraction des substances transparentes.

Ici S est une fente étroite éclairée à la lumière monochromatique $\lambda = 589$ nm, *1* et *2*, deux tubes à air identiques de longueur $l = 10{,}0$ cm chacune, D, le diaphragme à deux fentes. Lorsque l'air dans le tube *1* a été remplacé par l'ammoniac, l'image d'interférence sur l'écran E a dévié vers le haut de $N = 17$ franges. L'indice de réfraction de l'air est $n = 1{,}000277$. Déterminer l'indice de réfraction de l'ammoniac.

4.78. Une onde électromagnétique tombe suivant une normale sur la surface de séparation de deux milieux d'indices de réfraction n_1 et n_2. En se servant de la condition pour la composante tangentielle du vecteur **E** sur la surface de séparation et de la loi de la conservation de l'énergie, montrer que le vecteur **E**:

a) de l'onde réfractée ne subit pas de saut de phase sur la surface de séparation;

b) de l'onde réfléchie y subit un saut de phase de π si a lieu la réflexion par un milieu optiquement plus dense.

4.79. Un faisceau parallèle de lumière blanche tombe sur une pellicule mince ($n = 1{,}33$). L'angle d'incidence $i_1 = 52°$. Pour quelle épaisseur de la pellicule la lumière réfléchie sera-t-elle teinte de jaune au maximum ($\lambda = 0{,}60\ \mu$)?

4.80. Déterminer l'épaisseur minimale de la pellicule d'indice de réfraction 1,33 telle que la lumière de longueur d'onde 0,64 μ subisse une réflexion maximale, tandis que la lumière de longueur d'onde 0,40 μ ne se réfléchisse point. L'angle d'incidence de la lumière est égal à 30°.

4.81. Pour diminuer les pertes de la lumière dues à la réflexion par la surface du verre, celle-ci est couverte d'une couche mince de substance d'indice de réfraction $n' = \sqrt{n}$, où n est l'indice du verre. Dans ce cas les amplitudes des vibrations lumineuses réfléchies par les deux faces d'une telle couche seront égales. Pour quelle épaisseur de cette couche le pouvoir de réflexion du verre suivant la normale sera nul pour la lumière de longueur d'onde λ?

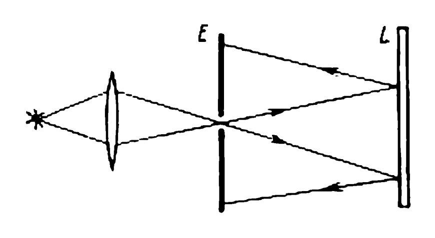


Fig. 164

4.82. La lumière monochromatique diffuse à $\lambda = 0{,}60\ \mu$ tombe sur une pellicule mince d'une substance d'indice de réfraction $n = 1{,}5$. Trouver l'épaisseur de la pellicule si l'interfrange angulaire observée dans la lumière réfléchie sous des angles voisins de $i = 45°$ est $\delta i = 3{,}0°$.

4.83. Un faisceau de lumière monochromatique provenant d'une ouverture dans l'écran E (fig. 164) après avoir subi une réflexion par une mince lame de verre à faces planes parallèles L vient former sur l'écran un système de franges d'interférence d'inclinaison égale. L'épaisseur de la lame est d, sa distance à l'écran l, les rayons des

i-ème et k-ème anneaux sombres r_i et r_k. Déterminer la longueur d'onde de la lumière étant donné que $r_{i,\,k} \ll l$.

4.84. Une onde lumineuse monochromatique plane de longueur λ attaque la surface d'un coin de verre dont les faces font entre elles un angle $\alpha \ll 1$. Le plan d'incidence est perpendiculaire à l'arête du coin, l'angle d'incidence i. Déterminer l'interfrange sur un écran disposé perpendiculairement à la lumière réfléchie.

4.85. La lumière de longueur d'onde $\lambda = 0{,}55\ \mu$ tombe en incidence normale sur la surface d'un coin de verre. On observe en lumière réfléchie un système de franges dont l'interfrange vaut $\Delta x = 0{,}21$ mm. Déterminer:

a) l'angle que font entre elles les faces du coin;

b) le degré de monochromie de la lumière ($\Delta\lambda/\lambda$) les franges disparaissant à la distance $l \approx 1{,}5$ cm du sommet du coin.

4.86. Une lentille de verre plan-convexe est accolée, par sa surface convexe, à une lame de verre. Le rayon de courbure de la face convexe de la lentille est R, la longueur d'onde λ. Déterminer la largeur d'un anneau de Newton Δr en fonction de son rayon r dans une région où $\Delta r \ll r$.

4.87. Une lentille plan-convexe de rayon de courbure $R = 40$ cm est accolée par sa face convexe à une lame de verre. Le rayon d'un certain anneau sombre en lumière réfléchie est alors $r = 2{,}5$ mm. En observant cet anneau, on éloigne, avec précaution, la lentille de la lame de $\Delta h = 10\ \mu$. Quel deviendra alors le rayon de l'anneau?

4.88. Une lentille de verre plan-convexe, dont la face sphérique porte en sa partie centrale une petite facette plane de rayon $r_0 = 3{,}0$ mm, est mise en contact, par cette facette, avec une lame de verre. Le rayon de courbure de la face convexe de la lentille $R = 150$ cm. Déterminer le rayon du sixième anneau clair en lumière réfléchie de longueur d'onde $\lambda = 655$ nm.

4.89. Une lentille de verre plan-convexe dont la face sphérique a le rayon de courbure $R = 12{,}5$ cm est *appliquée* à une lame de verre. En lumière réfléchie les diamètres des dixième et quinzième anneaux sombres de Newton sont respectivement $d_1 = 1{,}00$ mm et à $d_2 = 1{,}50$ mm. En déduire la longueur d'onde de la lumière.

4.90. Deux minces lentilles de verre plan-convexes sont en contact par leurs faces sphériques. Déterminer la puissance de ce système sachant qu'en lumière réfléchie de $\lambda = 0{,}60\ \mu$ le diamètre du cinquième anneau clair $d = 1{,}50$ mm.

4.91. Deux lentilles de verre minces et symétriques: biconvexe et biconcave, sont mises en contact et forment un système de puissance $\Phi = 0{,}50\ \delta$. On observe en lumière réfléchie par ce système, de $\lambda = 0{,}61\ \mu$, des anneaux de Newton. Déterminer:

a) le rayon du dixième anneau sombre;

b) comment change le rayon de cet anneau si l'espace entre les lentilles est rempli d'eau?

4.92. La face sphérique d'une lentille plan-convexe est en contact avec une lame de verre. L'espace entre la lentille et la lame est

rempli de bisulfure de carbone. Les indices de réfraction de la lentille, du bisulfure de carbone et de la lame valent respectivement $n_1 = 1{,}50$, $n_2 = 1{,}63$ et $n_3 = 1{,}70$. Le rayon de courbure de la surface sphérique de la lentille $R = 100$ cm. Déterminer le rayon du cinquième anneau sombre de Newton en lumière réfléchie de $\lambda = 0{,}50$ μ.

4.93. Dans un interféromètre à deux faisceaux on utilise la raie jaune du mercure constituée par deux composantes de longueurs d'onde $\lambda_1 = 576{,}97$ nm et $\lambda_2 = 579{,}03$ nm. Pour quel ordre minimal d'interférence la netteté des franges sera-t-elle la pire.

4.94. Dans un interféromètre de Michelson on utilise la raie jaune de sodium constituée par deux composantes de longueurs d'onde $\lambda_1 = 589{,}0$ nm et $\lambda_2 = 589{,}6$ nm. Lors de la translation d'un des miroirs les franges disparaissaient périodiquement (pourquoi?). Trouver le déplacement du miroir entre deux disparitions successives des franges.

4.95. En éclairant un étalon de Fabry-Pérot par un faisceau lumineux monochromatique divergent de longueur d'onde λ, on obtient dans le plan focal de la lentille une image d'interférence: le système

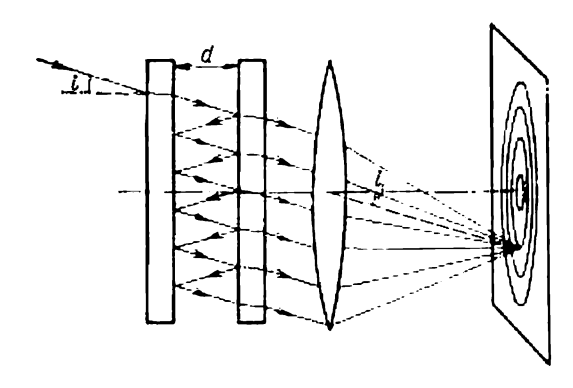


Fig. 165

d'anneaux concentriques (fig. 165). L'épaisseur de l'étalon est égale à d. Déterminer en fonction de l'ordre d'interférence:

a) la disposition des anneaux;

b) l'interfrange angulaire.

4.96. Déterminer pour un étalon de Fabry-Pérot dont l'épaisseur est $d = 2{,}5$ cm:

a) l'ordre maximal d'interférence de la lumière de longueur d'onde $\lambda = 0{,}50$ μ;

b) le domaine de dispersion $\Delta\lambda$, i.e. un intervalle spectral des longueurs d'onde tel qu'on n'observe pas encore, au voisinage de $\lambda = 0{,}50$ μ, la superposition avec d'autres ordres d'interférence.

Diffraction de la lumière

4.97. Une onde lumineuse plane tombe en incidence normale sur une plaque opaque munie d'un orifice rond. Ce dernier représente les N premières zones de Fresnel pour un point P d'un écran placé à la distance b de la plaque. La longueur d'onde de la lumière est λ. Déterminer l'intensité lumineuse I_0 devant la plaque sachant la distribution de l'intensité lumineuse sur l'écran $I(r)$, où r est la distance au point P.

4.98. Une source lumineuse ponctuelle de $\lambda = 0{,}50\ \mu$ est située à la distance de $a = 1{,}0$ m devant un diaphragme à ouverture ronde de rayon $r = 1{,}0$ mm. Trouver la distance b séparant le diaphragme du point d'observation pour lequel le nombre de zones de Fresnel dans l'ouverture est $m = 3$.

4.99. Un diaphragme à ouverture ronde, dont le rayon r peut varier au cours de l'expérience, est placé entre une source lumineuse ponctuelle et un écran. Les distances du diaphragme à la source et à l'écran sont $a = 100$ cm et $b = 125$ cm. Déterminer la longueur d'onde de la lumière sachant que le maximum de l'éclairement au centre de l'image de diffraction sur l'écran est observé pour $r_1 = 1{,}00$ mm, et le maximum suivant, pour $r_2 = 1{,}29$ mm.

4.100. Une onde lumineuse plane monochromatique d'intensité I_0 attaque normalement un écran opaque avec une ouverture ronde. Quelle est l'intensité lumineuse I en un point, situé derrière l'écran, pour lequel l'ouverture:

a) est assimilable à la première zone de Fresnel; à la moitié intérieure de la première zone;

b) était identique à la première zone de Fresnel et dont on a fermé ensuite la moitié (suivant le diamètre)?

4.101. Une onde lumineuse plane monochromatique d'intensité I_0 tombe en incidence normale sur un disque opaque qui cache la première zone de Fresnel du point d'observation P. Comment changera l'intensité lumineuse I en P après l'enlèvement:

a) d'une moitié du disque (suivant le diamètre);

b) d'une moitié de la moitié extérieure de la première zone de Fresnel du disque (suivant le diamètre)?

4.102. Une onde lumineuse plane monochromatique d'intensité I_0 tombe normalement sur les surfaces des écrans opaques représentés fig. 166. Déterminer l'intensité lumineuse I en un point P:

a) situé derrière le sommet des écrans *1-3* et derrière le bord du demi-plan *4*;

b) tel que le bord arrondi des écrans *5-8* coïncide avec la frontière de la première zone de Fresnel.

Généraliser les résultats obtenus pour les écrans *1-4* à l'aide d'une seule formule; idem pour les écrans *5-8*.

4.103. Une onde lumineuse plane de $\lambda = 0{,}60\ \mu$ tombe en incidence normale sur une grande lame de verre, dont la surface opposée

est munie d'un évidement rond (fig. 167). Ce dernier représente, pour un point d'observation P, la première une et demie zone de Fresnel. Calculer la profondeur h de l'évidement telle que l'intensité lumineuse au point P soit : a) maximale ; b) minimale ; c) égale à celle de la lumière incidente.

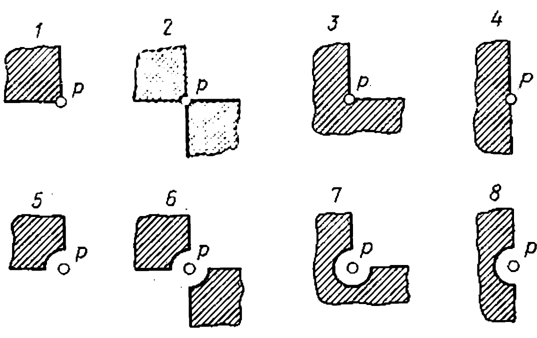


Fig. 166

4.104. Une onde lumineuse plane de longueur λ et d'intensité I_0 attaque normalement une grande lame de verre dont la face opposée représente un écran opaque muni d'une ouverture ronde assimilable à la première zone de Fresnel pour un point d'observation P. Au milieu de l'ouverture est pratiquée une cavité ronde égale à la moitié de la zone de Fresnel. Pour quelle profondeur h de cette cavité l'intensité lumineuse au point P sera-t-elle maximale? Quelle est sa valeur?

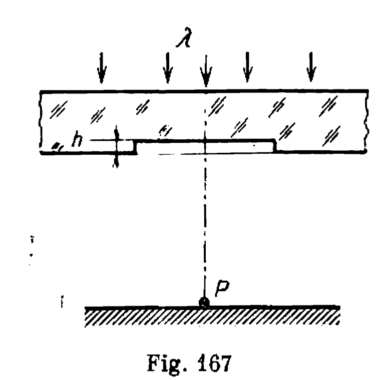


Fig. 167

4.105. Une onde lumineuse plane de $\lambda = 0{,}57$ μ tombe en incidence normale sur la surface d'un disque de verre ($n = 1{,}60$) qui cache une et demie zone de Fresnel pour un point d'observation P. Pour quelle épaisseur minimale de ce disque l'intensité lumineuse au point P sera-t-elle maximale? Tenir compte des interférences de la lumière lors du passage à travers le disque.

4.106. On place une lentille mince convergente de distance focale $f = 50$ cm suivie immédiatement d'un diaphragme à ouverture ronde et d'un écran séparé du diaphragme par $b = 75$ cm sur le trajet d'une onde lumineuse plane de $\lambda = 0{,}54$ μ. Pour quels rayons de l'ouverture le centre de l'image de diffraction sur l'écran aura-il un éclairement maximal?

4.107. Une onde lumineuse plane monochromatique tombe normalement sur une ouverture ronde. A la distance $b = 9{,}0$ m de celle-ci se trouve un écran où l'on observe une certaine image de

diffraction. Le diamètre de l'ouverture est diminué de $\eta = 3{,}0$ fois. Déterminer la nouvelle distance b' à laquelle il faut placer l'écran pour y obtenir une image de diffraction semblable à la précédente mais η fois plus petite.

4.108. Une petite bille opaque de diamètre $D = 40$ mm est placée entre la source lumineuse de $\lambda = 0{,}55$ μ et une plaque photographique. Les distances de la bille à la source et à la plaque sont respectivement $a = 12$ m et $b = 18$ m. Déterminer:

a) la dimension de l'image y' sur la plaque, la dimension linéaire de la source étant $y = 6{,}0$ mm;

b) la hauteur minimale des aspérités, couvrant de la façon chaotique la surface de la bille, telle que la bille cache la lumière.

Remarque. Le calcul et l'expérience montrent que cela se produit dans le cas où la hauteur des aspérités est comparable à la largeur de la zone de Fresnel coïncidant avec le bord de l'écran opaque.

4.109. Une source ponctuelle de lumière monochromatique est placée devant un réseau zoné à la distance $a = 1{,}5$ m de celle-ci. L'image de la source se forme à la distance $b = 1{,}0$ m de la lame. En déduire la distance focale du réseau zoné.

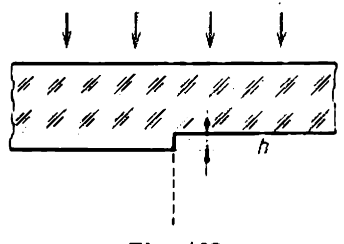


Fig. 168

4.110. Une onde lumineuse plane de $\lambda = 0{,}60$ μ et de I_0 tombe en incidence normale sur une grande lame de verre de profil indiqué fig. 168. Pour quelle hauteur h l'intensité lumineuse en des points situés au-dessous du gradin sera-t-elle:

a) minimale?

b) deux fois plus petite que I_0 (pertes dues à la réflexion sont négligeables).

4.111. Une onde lumineuse plane monochromatique attaque un demi-plan opaque suivant une normale. Un écran est placé à la distance $b = 100$ cm derrière ce demi-plan. Trouver à l'aide de la spirale de Cornu (fig. 169):

a) le rapport des intensités du premier maximum et du minimum qui lui est voisin;

b) la longueur d'onde de la lumière étant donné que deux maxima premiers sont séparés par $\Delta x = 0{,}63$ mm.

4.112. Une onde lumineuse plane de $\lambda = 0{,}60$ μ tombe en incidence normale sur une longue bandelette opaque de largeur $d = 0{,}70$ mm. Un écran se trouve derrière cette bandelette à la distance $b = 100$ cm. Déterminer, à l'aide de la spirale de Cornu (fig. 169), le rapport des intensités lumineuses au milieu de la figure de diffraction et au bord de l'ombre géométrique.

4.113. Une onde lumineuse plane monochromatique tombe en incidence normale sur une longue fente rectangulaire suivie, à la distance $b = 60$ cm, d'un écran. Initialement, la largeur de la fente

est telle qu'au milieu de la figure de diffraction sur l'écran s'observe un minimum le plus accentué. Après avoir élargi la fente de $\Delta h =$ $= 0{,}70$ mm on obtient au centre de la figure le minimum suivant. En déduire la longueur d'onde lumineuse.

4.114. Une onde lumineuse plane de $\lambda = 0{,}65$ μ tombe en incidence normale sur une grande lame de verre dont la face opposée

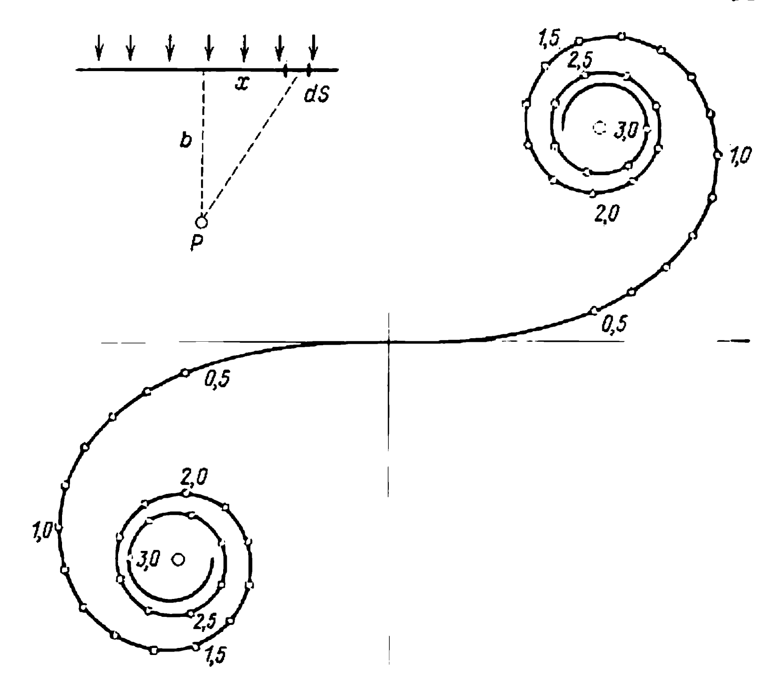


Fig. 169. Spirale de Cornu.

Les nombres indiqués sur la spirale donnent les valeurs du paramèrre v. Pour une onde plane $v = x\sqrt{2/b\lambda}$, où x et b sont les distances déterminant la position de l'élément de la zone dS de la surface d'onde par rapport au point d'observation P, comme le montre l'image au coin gauche supérieur; λ, la longueur d'onde.

est munie d'un long évidement rectangulaire de largeur $d = 0{,}60$ mm. Déterminer à l'aide de la spirale de Cornu (fig. 169) la profondeur de l'évidement telle qu'au milieu de la figure de diffraction sur l'écran situé à la distance $b = 77$ cm de la lame, s'observe un minimum.

4.115. Une onde lumineuse plane de $\lambda = 0{,}65$ μ tombe en incidence normale sur une grande lame de verre dont la face opposée possède un gradin et une bandelette opaque large de $d = 0{,}60$ mm (fig. 170). Un écran est placé à la distance $b = 110$ cm de la lame. La hauteur du gradin h est telle qu'en un point *2* sur l'écran l'intensité lumineuse est la plus grande possible. Déterminer à l'aide de la fig. 169 le rapport des intensités aux points *1* et *2*.

4.116. Une onde lumineuse plane monochromatique d'intensité I_0 tombe en incidence normale sur un écran opaque muni d'une lon-

gue fente dont un bord est affecté d'une coupure demi-circulaire (fig. 171). Le bord de la coupure coïncide avec la frontière de la première zone de Fresnel pour un point d'observation P. La largeur de la fente constitue 0,90 du rayon de la coupure. Déterminer l'intensité lumineuse au point P.

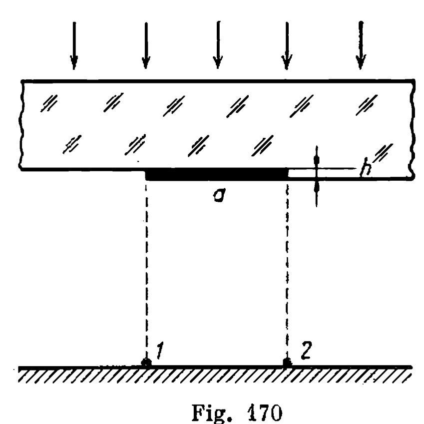


Fig. 170

4.117. Une onde lumineuse plane monochromatique tombe en incidence normale sur un écran opaque pourvu d'une longue fente dont la forme est représentée fig. 172. Déterminer le rapport des intensités lumineuses aux points *1*, *2* et *3* situés derrière l'écran à la même distance de celui-ci sachant que pour le point *3* le bord arrondi de la fente coïncide avec la frontière de la première zone de Fresnel.

4.118. Une onde lumineuse plane monochromatique tombe en incidence normale sur un écran opaque en forme d'une longue bandelette avec une ouverture ronde en son milieu. Cette ouverture

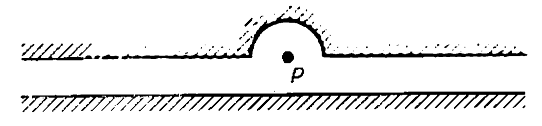


Fig. 171

représente pour un point d'observation P la moitié de la zone de Fresnel, le diamètre de l'ouverture étant $\eta = 1{,}07$ fois inférieur à la largeur de la bandelette. Déterminer à l'aide de la spirale de Cornu (fig. 169) l'intensité lumineuse au point P si celle de la lumière incidente est I_0.

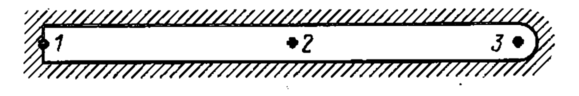


Fig. 172

4.119. La lumière de longueur d'onde λ tombe en incidence normale sur une longue fente rectangulaire large de b. Déterminer la distribution angulaire des intensités lumineuses lors de la diffraction de Fraunhofer ainsi que la position angulaire des minima.

4.120. En se servant du résultat obtenu dans le problème précédent, établir les conditions définissant la position angulaire des maxima d'ordres un, deux et trois.

4.121. Déterminer la position angulaire des premiers minima situés de deux côtés du maximum central lors de la diffraction de Fraunhofer par une fente de largeur $b = 10\ \mu$, l'angle d'incidence de la lumière étant $\vartheta = 30°$ et la longueur d'onde, $\lambda = 0{,}50\ \mu$.

4.122. Une onde lumineuse plane de $\lambda = 0{,}60\ \mu$ tombe en incidence normale sur la face d'un coin de verre dont l'angle réfringent est $\vartheta = 15°$. La face opposée, opaque, porte une fente large de $b = 10\ \mu$ parallèle à l'arête du coin. Déterminer:

a) l'angle φ_0 que fait la direction du maximum de Fraunhofer d'ordre zéro avec la direction de la lumière incidente;

b) la largeur angulaire du maximum de Fraunhofer d'ordre zéro.

4.123. Une lumière monochromatique attaque sous un angle de glissement $\vartheta_0 = 1{,}0°$ un réseau de diffraction de période $d = 1{,}0$ mm. Un maximum de Fraunhofer de second ordre se forme sous un angle de glissement $\vartheta = 3{,}0°$. Déterminer la longueur d'onde de la lumière.

4.124. Tracer d'une manière approchée, la figure de diffraction observée lors d'une diffraction de Fraunhofer par un réseau composé de trois fentes identiques dans le cas où le rapport de la période du réseau à la largeur de la fente est égal:

a) à deux;

b) à trois.

4.125. Un faisceau lumineux tombe en incidence normale sur un réseau de diffraction. L'angle de diffraction pour la radiation de $\lambda_1 = 0{,}65\ \mu$ est égal alors, dans le second ordre, à $\vartheta_1 = 45°$. Déterminer l'angle de diffraction pour la radiation de $\lambda_2 = 0{,}50\ \mu$ dans le troisième ordre.

4.126. Un faisceau lumineux de longueur d'onde $\lambda = 535$ nm tombe en incidence normale sur un réseau de diffraction. Déterminer la période du réseau sachant qu'à un des maxima de Fraunhofer correspond l'angle de diffraction de 35° et l'ordre le plus grand du spectre est égal à cinq.

4.127. Déterminer la longueur d'onde d'une lumière monochromatique tombant en incidence normale sur un réseau de période $d = 2{,}2\ \mu$ si l'angle fait par les directions menées aux maxima de Fraunhofer de premier et de second ordres est $\Delta\vartheta = 15°$.

4.128. Un faisceau lumineux de longueur d'onde 530 nm tombe sur un réseau de diffraction transparent de période $1{,}50\ \mu$. Déterminer l'angle que fait avec la normale au réseau la direction menée au maximum de Fraunhofer de plus grand ordre si la lumière tombe:

a) en incidence normale;

b) sous un angle 60° à la normale.

4.129. Un faisceau lumineux de longueur d'onde $\lambda = 0{,}60\ \mu$ tombe en incidence normale sur un réseau de diffraction tracé sur la surface plane d'une lentille de verre plan-convexe cylindrique de rayon de courbure $R = 20$ cm. La période du réseau est $d = 6{,}0\ \mu$. Déterminer la distance des maxima principaux symétriques de premier ordre situés dans le plan focal de cette lentille.

4.130. Une onde lumineuse plane de $\lambda = 0,50$ μ tombe en incidence normale sur une face du coin de verre d'angle réfringent $\vartheta = 30°$. Un réseau de diffraction transparent de période $d = 2,00$ μ, dont les traits sont parallèles à l'arête, est tracé sur la face opposée du coin. Déterminer les angles faits par les directions menées aux maxima principaux de Fraunhofer d'ordre zéro et de premier ordre avec le faisceau incident. Quel est l'ordre maximal du spectre? Sous quel angle à la direction de la lumière incidente est-il observé?

4.131. Une onde lumineuse plane tombe en incidence normale sur un réseau de diffraction de phase dont le profil est donné fig. 173.

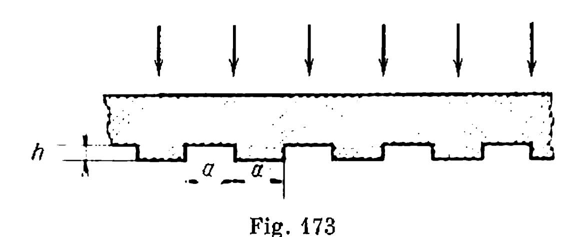


Fig. 173

Le réseau est tracé sur une lame de verre d'indice de réfraction n. Déterminer la profondeur h des traits telle que l'intensité du maxima de Fraunhofer central soit nulle pour la longueur d'onde égale à λ. Quel est alors l'angle de diffraction correspondant au premier maximum?

4.132. La fig. 174 représente un schéma du dispositif permettant d'observer la diffraction de la lumière par l'ultrason. Une onde

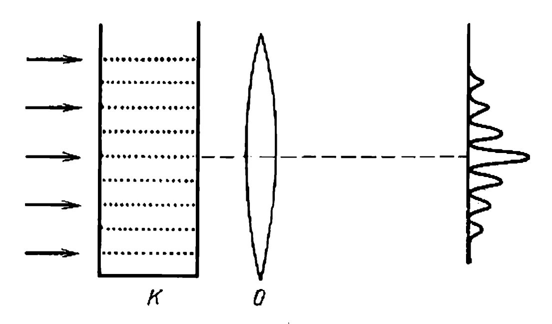


Fig. 174

lumineuse plane de $\lambda = 0,55$ μ traverse une cuve K avec de l'eau, siège d'une onde ultrasonore stationnaire de fréquence $\nu = 4,7$ MHz. A la suite de la diffraction de la lumière sur la structure optiquement hétérogène il se forme dans le plan focal de l'objectif O, de distance focale $f = 35$ cm, un spectre de diffraction. La distance des maxima voisins $\Delta x = 0,60$ mm. Déterminer la célérité des vibrations ultrasonores dans l'eau.

4.133. Pour mesurer la distance angulaire ϑ des composantes d'une étoile double par la méthode de Michelson, on place devant l'objectif d'un télescope un diaphragme à deux fentes étroites parallèles dont la distance d est variable. En diminuant d, on a observé, pour $d = 95$ cm, le premier brouillage des franges de diffraction dans le plan focal de l'objectif. Déterminer ϑ pour la lumière de longueur d'onde $\lambda = 0{,}55$ μ.

4.134. Un réseau de diffraction transparent a une période $d = 1{,}50$ μ. Trouver la dispersion angulaire D (en minutes angulaires/nm) correspondant au maximum de plus grand ordre de radiation de $\lambda = 530$ nm dans le cas où la lumière tombe sur le réseau :

a) en incidence normale;

b) sous un angle $\vartheta_0 = 45°$ à la normale.

4.135. Un faisceau lumineux de longueur d'onde λ tombe en incidence normale sur un réseau de diffraction de largeur l. En déterminer la dispersion angulaire en fonction de l'angle de diffraction ϑ.

4.136. La lumière de $\lambda = 589{,}0$ nm attaque normalement un réseau de diffraction de période $d = 2{,}5$ μ comportant $N = 10\,000$ traits. Déterminer la largeur angulaire du maximum de diffraction de second ordre.

4.137. Montrer que lors de l'incidence normale de la lumière sur un réseau de diffraction la valeur maximale de son pouvoir de résolution ne peut dépasser la valeur l/λ, où l est la largeur du réseau, λ, la longueur d'onde.

4.138. Montrer sur l'exemple d'un réseau de diffraction que la différence de fréquence de deux maxima, distingués d'après le critère de Rayleigh, est égale à l'inverse de la différence des temps de passage des vibrations extrêmes qui interfèrent, i.e. $\delta\nu = 1/\delta t$.

4.139. La lumière contenant deux raies de longueurs d'onde 600,000 et 600,050 nm tombe sous une incidence normale sur un réseau de diffraction de largeur 10,0 mm. Sous certain angle de diffraction ϑ ces raies sont à la limite de la résolution (d'après le critère de Rayleigh). Trouver ϑ.

4.140. Un faisceau lumineux tombe sous une incidence normale sur un réseau de diffraction de largeur $l = 6{,}5$ cm qui a 200 traits par millimètre. Le spectre étudié comprend une raie de $\lambda = 670{,}8$ nm, constituée de deux composantes qui se distinguent de $\delta\lambda = 0{,}015$ nm. Déterminer :

a) l'ordre du spectre pour lequel on distingue ces composantes;

b) la différence minimale des longueurs d'onde que puisse distinguer ce réseau dans le domaine de $\lambda = 670$ nm.

4.141. Lorsqu'un faisceau lumineux tombe en incidence normale sur un réseau de diffraction transparent de largeur de 10 mm il se trouve que les composantes de la raie jaune du sodium (589,0 et 589,6 nm) sont distinguées à partir du cinquième ordre du spectre. Evaluer :

a) la période du réseau ;

b) la largeur d'un réseau ayant même période qui permetterait de distinguer, dans le troisième ordre, un doublet d'une raie $\lambda = 460{,}0$ nm dont les composantes diffèrent l'une de l'autre de 0,13 nm.

4.142. Un réseau de diffraction transparent d'un spectrographe de quartz a une largeur de 25 mm et porte 250 traits par millimètre. Une plaque photographique est placée dans le plan focal de l'objectif dont la distance focale est 80 cm. La lumière attaque le réseau sous une incidence normale. Le spectre à étudier comprend une raie dont les composantes du doublet ont pour longueurs d'onde 310,154 et 310,184 nm. Déterminer :

a) la distance, sur la plaque photographique, des composantes du doublet dans les spectres du premier et du second ordres ;

b) sont-elles distinctes dans ces ordres du spectre?

4.143. Le pouvoir de résolution limite d'un prisme triangulaire d'un spectrographe $\lambda/\delta\lambda$ est conditionné par la diffraction de la

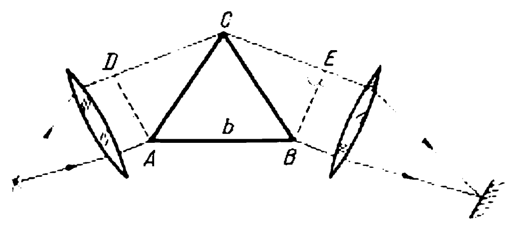


Fig. 175

lumière par les bords du prisme (comme par une fente). Lorsque le prisme est placé sous un angle de déviation minimale, on a d'après le critère de Rayleigh

$$\lambda/\delta\lambda = b \mid dn/d\lambda \mid,$$

où b est la largeur de la base du prisme (fig. 175), $dn/d\lambda$, la dispersion de sa substance. Déduire cette formule.

4.144. Un prisme triangulaire d'un spectrographe est fait en verre dont l'indice est fonction de la longueur d'onde lumineuse : $n = A + B/\lambda^2$ où A et B sont des constantes et $B = 0{,}010\ \mu^2$. En se servant de la formule du problème précédent, déterminer :

a) le pouvoir de résolution du prisme en fonction de λ ; calculer $\lambda/\delta\lambda$ au voisinage de $\lambda_1 = 434$ nm et de $\lambda_2 = 656$ nm sachant que la largeur de la base du prisme est $b = 5{,}0$ cm ;

b) la largeur de la base d'un prisme capable de distinguer le doublet jaune du sodium (589,0 et 589,5 nm).

4.145. Quelle doit être la largeur de la base d'un prisme triangulaire ayant le même pouvoir séparateur qu'un réseau de diffraction à 10 000 traits dans le second ordre du spectre?

4.146. Soit une lunette dont l'objectif a le diamètre $D = 5{,}0$ cm. Calculer le pouvoir séparateur de l'objectif et la distance minimale entre deux points éloignés de $l = 3{,}0$ km de la lunette que celle-ci peut résoudre (prendre $\lambda = 0{,}55$ μ).

4.147. Calculer la distance minimale entre deux points sur la Lune qu'un réflecteur dont le miroir a un diamètre de 5 m permet de voir séparés l'un de l'autre. Prendre pour la longueur d'onde lumineuse $\lambda = 0{,}55$ μ.

4.148. Déterminer le grossissement minimal d'une lunette, dont l'objectif a le diamètre $D = 5{,}0$ cm, tel que le pouvoir de résolution de son objectif est entièrement utilisé. Le diamètre de la pupille de l'œil est $d = 4{,}0$ mm.

4.149. Soit un microscope à un objectif tel que son ouverture numérique $\sin u = 0{,}24$ où u est le demi-angle d'ouverture du cône de rayons tombant sur la monture de l'objectif. Déterminer la distance minimale que puisse résoudre ce microscope, l'éclairement de l'objectif étant optimal et la longueur d'onde lumineuse $\lambda = 0{,}55$ μ.

4.150. Déterminer le grossissement minimal d'un microscope doté d'un objectif d'ouverture numérique $\sin u = 0{,}24$, le pouvoir séparateur de son objectif étant entièrement utilisé. Le diamètre de la pupille de l'œil $d_0 = 4{,}0$ mm.

4.151. Un faisceau de rayons X de longueur d'onde λ tombe sous un angle de glissement 60,0° sur un système de centres diffusants alignés de période a. Déterminer les angles de glissement correspondant à tous les maxima de diffraction pour $\lambda = 2/5$ μ.

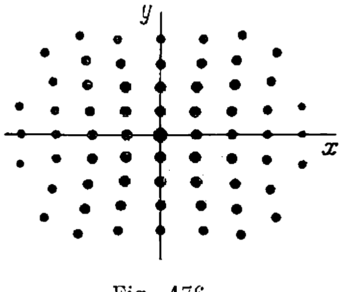


Fig. 176

4.152. Un faisceau de rayons X de longueur d'onde $\lambda = 40$ pm attaque en incidence normale un réseau plan rectangulaire de centres diffusants et produit sur un écran plan, situé à la distance $l = 10$ cm du réseau, un système de maxima de diffraction (fig. 176). Déterminer les périodes du réseau a et b suivant les axes des x et des y respectivement si les distances entre les maxima symétriques de second ordre sont $\Delta x = 60$ mm (suivant l'axe des x) et $\Delta y = 40$ mm (suivant l'axe des y).

4.153. Un faisceau de rayons X attaque un réseau rectangulaire tridimensionnel dont les périodes sont a, b et c. La direction du rayon incident coïncide avec celle le long de laquelle la période du réseau est égale à a. Déterminer les directions menées aux maxima de diffraction et les longueurs d'onde pour lesquelles ces maxima s'observent.

4.154. Un pinceau de rayons X attaque, sous un angle de glissement 60,0°, la face naturelle du monocristal NaCl de densité 2,16 g/cm³. La réflexion spéculaire par cette face conduit à la forma-

tion d'un maximum de second ordre. Déterminer la longueur d'onde de la radiation.

4.155. Un faisceau de rayons X de $\lambda = 174$ pm attaque la surface d'un monocristal tournant autour d'un axe parallèle à sa surface et perpendiculaire à la direction du faisceau incident. Les directions menées aux maxima de second et de troisième ordres provenant du système de plans parallèles à la surface du monocristal (plans réticulaires) font entre elles un angle $\alpha = 60°$. Déterminer la distance des plans correspondante.

4.156. Un faisceau de rayons X de $\lambda = 17{,}8$ pm traversant un échantillon polycristallin produit sur un écran situé à $l = 15$ cm de ce dernier, un système d'anneaux de diffraction. Déterminer le rayon d'un anneau clair correspondant au second ordre de la réflexion par le système de plans dont la distance est $d = 155$ pm.

Polarisation de la lumière

Les *formules de Fresnel* pour l'intensité de la lumière réfléchie par surface de séparation de deux diélectriques isotropes:

$$I'_{\perp} = I_{\perp} \frac{\sin^2(i_1 - i_2)}{\sin^2(i_1 + i_2)}, \quad I'_{\parallel} = I_{\parallel} \frac{\mathrm{tg}^2(i_1 - i_2)}{\mathrm{tg}^2(i_1 + i_2)},$$

où $I'_{\perp}$ et $I_{\parallel}$ sont les intensités de la lumière incidente dont les vibrations du vecteur lumineux sont respectivement perpendiculaires et parallèles au plan d'incidence; i_1 et i_2, les angles d'incidence et de réfraction.

4.157. Une onde plane monochromatique de lumière naturelle d'intensité I_0 tombe en incidence normale sur un écran composé de deux demi-plans de polaroïd en contact. La direction principale d'un polaroïd est parallèle et celle de l'autre perpendiculaire à leur ligne de séparation. Quelle est la nature de l'image de diffraction derrière l'écran? Quelle est l'intensité lumineuse derrière l'écran en des points d'un plan perpendiculaire à l'écran et passant par la ligne de séparation des polaroïds?

4.158. Une onde plane monochromatique de lumière naturelle d'intensité I_0 tombe en incidence normale sur un écran opaque muni d'une ouverture ronde qui représente la première zone de Fresnel pour un point d'observation P. Déterminer l'intensité lumineuse au point P une fois l'ouverture est couverte par deux polaroïds identiques dont les directions principales sont perpendiculaires si leur surface de séparation passe:

a) suivant le diamètre d'ouverture;

b) suivant la circonférence limitant la première demi-zone de Fresnel.

4.159. Un pinceau de lumière naturelle traverse un gaz, ensemble de molécules optiquement isotropes. Déterminer le degré de polarisation de la lumière diffusée sous un angle ϑ à la direction du pinceau.

4.160. Déterminer à l'aide des formules de Fresnel:

a) le facteur de réflexion par le verre de la lumière naturelle lors de l'incidence normale;

b) la perte relative de flux lumineux occasionnée par les réflexions lors du passage d'un faisceau paraxial de lumière naturelle par un système optique centré constitué par cinq lentilles de verre (réflexions secondaires sont négligeables).

4.161. Une onde lumineuse tombe en incidence normale sur une surface de verre recouverte par une couche de substance transparente. En négligeant les réflexions secondaires, démontrer que les amplitudes des ondes réfléchies par les deux surfaces d'une telle couche seront égales à condition que $n' = \sqrt{n}$ où n' et n sont respectivement les indices de la couche et du verre.

4.162. Un faisceau de lumière naturelle tombe sur la surface du verre. L'angle d'incidence est 45°. Déterminer à l'aide des formules de Fresnel le degré de polarisation:

a) de la lumière réfléchie;

b) de la lumière réfractée.

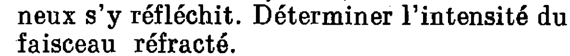
4.163. Montrer à l'aide des formules de Fresnel que la lumière réfléchie par la surface d'un diélectrique est entièrement polarisée lorsque l'angle d'incidence i_1 satisfait à la condition $\operatorname{tg} i_1 = n$ où n est l'indice de réfraction du diélectrique. Les rayons réfléchi et réfracté quel angle font-ils entre eux?

4.164. La lumière naturelle tombe sur la surface du verre sous l'angle de Brewster. Déterminer à l'aide des formules de Fresnel:

a) le facteur de réflexion;

b) le degré de polarisation de la lumière réfractée.

4.165. Un faisceau plan de lumière naturelle d'intensité I_0 attaque sous l'angle de Brewster la surface de l'eau. $\rho = 0{,}039$ du flux lumineux s'y réfléchit. Déterminer l'intensité du faisceau réfracté.



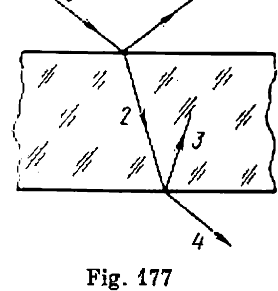
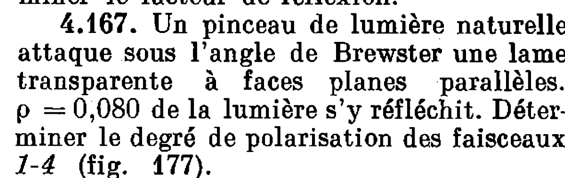


Fig. 177

4.166. Un faisceau de lumière polarisée dans un plan attaque sous l'angle de Brewster la surface de l'eau. Le plan de vibrations du vecteur lumineux fait un angle $\varphi = 45°$ avec le plan d'incidence. Déterminer le facteur de réflexion.



4.167. Un pinceau de lumière naturelle attaque sous l'angle de Brewster une lame transparente à faces planes parallèles. $\rho = 0{,}080$ de la lumière s'y réfléchit. Déterminer le degré de polarisation des faisceaux *1-4* (fig. 177).

4.168. Un pinceau de lumière d'intensité I_0 tombe sous l'angle de Brewster sur une lame de verre à faces planes parallèles (fig. 177). Déterminer à l'aide des formules de Fresnel:

a) l'intensité du faisceau lumineux transmis I_4, la lumière incidente étant polarisée linéairement et telle que son plan de vibration est perpendiculaire au plan d'incidence;

b) le degré de polarisation du faisceau transmis, la lumière incidente étant naturelle.

4.169. Un pinceau de lumière naturelle attaque sous l'angle de Brewster une pile de Stolétov composée de N lames de verre épaisses à faces planes parallèles. Déterminer :

a) le degré de polarisation P du faisceau transmis ;

b) P pour $N = 1, 2, 5$ et 10.

4.170. Construire, d'après Huygens, les fronts d'ondes et les directions de propagation des rayons ordinaire et extraordinaire dans un cristal uniaxe positif, son axe optique étant :

a) perpendiculaire au plan d'incidence et parallèle à la surface du cristal ;

b) contenu dans le plan d'incidence et parallèle à la surface du cristal ;

c) contenu dans le plan d'incidence sous un angle de 45° à la surface du cristal, la lumière tombant perpendiculairement à l'axe optique.

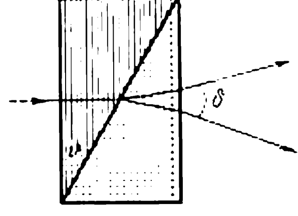


Fig. 178

4.171. Un pinceau de lumière naturelle de longueur d'onde $\lambda = 589$ nm attaque, sous l'incidence normale, la face du prisme de Wollaston fait en spath d'Islande, comme l'indique la figure 178. Les axes optiques des deux parties du prisme sont perpendiculaires. Déterminer l'angle δ des directions des pinceaux transmis pour $\vartheta = 30°$.

4.172. Un faisceau de lumière naturelle attaque un système de $N = 6$ nicols, le plan principal de chaque nicol précédent faisant un angle $\alpha = 30°$ avec celui du suivant. Quelle est la fraction transmise de flux lumineux?

4.173. Un faisceau de lumière naturelle attaque un système de trois polaroïds identiques disposés en série, la direction principale du polaroïd au milieu faisant un angle $\alpha = 60°$ avec les directions principales des deux autres. L'absorption de chaque polaroïd est telle que lors de l'incidence d'une lumière polarisée linéairement le coefficient de transmission maximal est $\tau = 0{,}81$. De combien diminue l'intensité lumineuse après avoir traversé ce système?

4.174. Le degré de polarisation d'une lumière partiellement polarisée $P = 0{,}25$. Déterminer le rapport de l'intensité de la composante polarisée de cette lumière à l'intensité de la composante naturelle.

4.175 Un nicol est placé sur le trajet d'un faisceau de lumière partiellement polarisée. Si l'on fait tourner le nicol d'un angle $\alpha = 60°$ à partir de la position correspondant à la transmission maximale de la lumière, l'intensité de la lumière transmise diminue de $\eta = 3{,}0$ fois. Déterminer le degré de polarisation de la lumière incidente.

4.176. Un faisceau de lumière naturelle traverse successivement deux polariseurs identiques. Dans le cas où les plans principaux des polariseurs sont parallèles, la lumière transmise est $n = 10{,}0$ fois

plus intense que dans le cas des polariseurs croisés. Déterminer le degré de polarisation produit par :

a) chacun des polariseurs ;

b) l'ensemble du système, les plans principaux étant parallèles.

4.177. Deux faisceaux lumineux de même intensité, parallèles et linéairement polarisés, dont les plans de vibrations N_1 et N_2 font entre eux un certain petit angle α (fig. 179), attaquent un nicol. Pour avoir la même intensité des deux faisceaux transmis, la direction principale N du nicol doit coïncider soit avec la bissectrice A soit avec B. Déterminer la valeur de l'angle α telle qu'en faisant tourner le nicol d'un petit angle $\delta\varphi$ ($\delta\varphi \ll \alpha$), depuis la position A on obtienne une variation relative des intensités des deux faisceaux ($\Delta I/I$) $\eta = 100$ fois plus grande qu'en le faisant tourner de même angle depuis la position B.

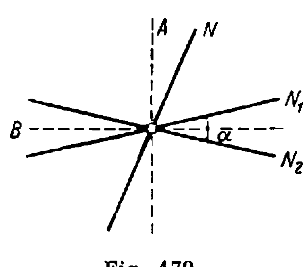


Fig. 179

4.178. Quelle est la nature de la polarisation d'une onde électromagnétique plane dont le vecteur **E** projeté sur les axes des x et y, perpendiculaires à la direction de sa propagation, a les composantes données par les équations suivantes :

a) $E_x = E\cos(\omega t - kz)$; $E_y = E\sin(\omega t - kz)$;

b) $E_x = E\cos(\omega t - kz)$; $E_y = E\cos(\omega t - kz + \pi/4)$;

c) $E_x = E\cos(\omega t - kz)$; $E_y = E\cos(\omega t - kz + \pi)$?

4.179. On a à fabriquer une lame de quartz parallèle à l'axe optique, dont l'épaisseur ne dépasse pas 0,50 mm. Déterminer l'épaisseur maximale de la lame telle que, après l'avoir traversée, la lumière de longueur d'onde $\lambda = 589$ nm polarisée linéairement :

a) subisse la rotation du plan de polarisation ;

b) devienne polarisée circulairement.

4.180. Une lame de quartz taillée parallèlement à l'axe optique est introduite entre deux nicols croisés. La direction principale des nicols fait un angle de 45° avec celle de la lame. L'épaisseur de la lame $d = 0{,}50$ mm. Pour quelles longueurs d'onde de la bande 0,50 à 0,60 μ l'intensité de la lumière transmise sera-t-elle indépendante de la rotation du nicol analyseur ? La différence des indices de réfraction des rayons ordinaires et extraordinaires est prise $\Delta n = 0{,}0090$ pour cette bande de longueurs d'onde.

4.181. Une lumière blanche naturelle attaque un système de deux nicols croisés entre lesquels est placée une lame de quartz d'épaisseur 1,50 mm taillée parallèlement à l'axe optique. L'axe de la lame fait un angle de 45° avec la direction principale des nicols. La lumière transmise par ce système est décomposée ensuite en spectre. Combien de franges sombres observe-t-on dans la bande de longueurs d'onde 0,55 à 0,66 μ ? La différence des indices de réfraction des rayons ordinaires et extraordinaires est prise 0,0090.

4.182. Une lame cristalline taillée parallèlement à l'axe optique, épaisse de 0,25 mm, sert de lame quart d'onde pour $\lambda = 530$ nm. Pour quelles longueurs d'onde dans le domaine du spectre visible sera-t-elle également une lame quart d'onde? On suppose que la différence des indices de réfraction des rayons ordinaires et extraordinaires égale à $n_e - n_o = 0{,}0090$ est la même pour toutes les longueurs d'onde de la lumière visible.

4.183. Une lame de quartz taillée parallèlement à l'axe optique est placée entre deux nicols croisés, son axe optique faisant un angle de 45° avec les directions principales des nicols. Pour quelle épaisseur minimale de la lame la lumière de $\lambda_1 = 643$ nm transmise par ce système aura-t-elle une intensité maximale, alors que la lumière de $\lambda_2 = 564$ nm, une intensité fortement affaiblie? La différence des indices de réfraction pour les deux longueurs d'onde est $n_e - n_o = 0{,}0090$.

4.184. Un coin de quartz d'angle réfringent $\vartheta = 3{,}5°$ est placé entre deux polaroïds croisés. L'axe optique du coin est parallèle à son arête et fait un angle de 45° avec les directions principales des polaroïds. Lors du passage de la lumière de $\lambda = 550$ nm à travers ce système on observe une image d'interférence. La largeur de chaque frange $\Delta x = 1{,}0$ mm. En déduire la différence des indices de réfraction des rayons extraordinaire et ordinaire du quartz pour la longueur d'onde indiquée.

4.185. De la lumière monochromatique naturelle d'intensité I_0 attaque un système de deux polaroïds entre lesquels est placée une lame cristalline taillée parallèlement à l'axe optique. La lame crée un déphasage δ entre les rayons ordinaire et extraordinaire. Montrer que l'intensité de la lumière émergente est donnée par

$$I = (I_0/2)\,[\cos^2(\alpha - \beta) - \sin 2\alpha \cdot 2\beta \cdot \sin^2(\delta/2)],$$

où α et β sont les angles que fait l'axe optique du cristal avec les directions principales des polaroïds. Etudier, en particulier, le cas des polaroïds croisés et de ceux parallèles.

4.186. Une lumière monochromatique polarisée circulairement attaque normalement une lame cristalline taillée parallèlement à l'axe optique. La lame est suivie d'un nicol dont la direction principale fait un angle α avec l'axe de la lame. Montrer que l'intensité de la lumière transmise par ce système est

$$I = I_0\,(1 + \sin 2\alpha \cdot \sin \delta),$$

où δ est le déphasage occasionné par la lame.

4.187. Comment, à l'aide d'un polaroïd et d'une lame quart d'onde taillée dans un cristal uniaxe positif ($n_e > n_o$), distinguer:

a) la lumière de polarisation lévogyre circulaire de celle de polarisation dextrogyre;

b) la lumière naturelle de celle de polarisation circulaire, de celle de polarisation elliptique et du mélange de la lumière naturelle avec la lumière de polarisation circulaire?

4.188. Une lumière tombe sur un système composé d'un polariseur P et d'un analyseur A croisés entre lesquels est placé un compensateur de Babinet C. Le compensateur de Babinet sert à mesurer la différence de marche entre les rayons dans les échantillons biréfringents. Il est constitué par deux coins de quartz (fig. 180) dont l'un a l'axe optique parallèle et l'autre perpendiculaire à l'arête du coin. Les directions principales du polariseur et de l'analyseur font un angle de 45° avec les axes optiques du compensateur. L'introduction de l'échantillon E étudié (son axe est orienté de façon indiquée sur la figure) fait déplacer les franges d'interférences vers le haut de

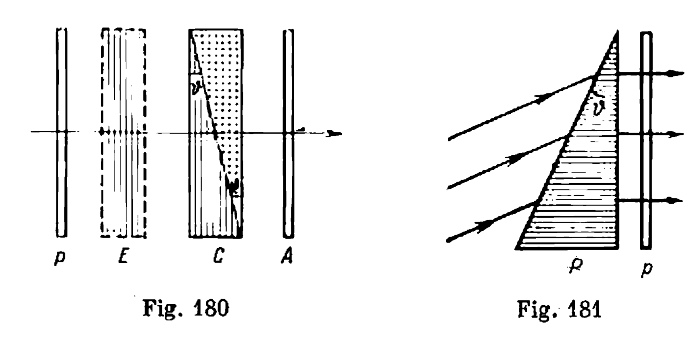


Fig. 180 Fig. 181

δx mm. En sachant l'angle réfringent ϑ des coins ($\vartheta \ll 1$) et la différence $n_e - n_0$ des indices de réfraction du quartz, déterminer:

a) la largeur d'une frange d'interférence Δx;

b) la grandeur et le signe de la différence de marche optique des rayons ordinaire et extraordinaire conditionnée par l'introduction de l'échantillon E.

4.189. Calculer, en se renseignant aux tables de l'Appendice, la différence des indices de réfraction du quartz correspondant à la polarisation circulaire lévo et dextrogyre de la lumière de longueur d'onde $\lambda = 589{,}5$ nm.

4.190. Un prisme de quartz triangulaire P d'angle réfringent $\vartheta = 30°$ reçoit de la lumière polarisée linéairement de longueur d'onde 0,59 μ (fig. 181). Dans le prisme, la lumière se propage le long de l'axe optique dont l'orientation est indiquée par les hachures. Derrière le polaroïd p s'observe un système de franges brillantes et sombres dont l'interfrange est $\Delta x = 15{,}0$ mm. Déterminer le pouvoir rotatoire du quartz et l'allure de la distribution de l'intensité lumineuse $I(x)$ derrière le polaroïd.

4.191. Un système de deux nicols croisés entre lesquels est placée une lame de quartz taillée perpendiculairement à l'axe optique reçoit de la lumière monochromatique naturelle. Trouver l'épaisseur minimale de la lame telle que le système transmette $\eta = 0{,}30$ de flux lumineux, le pouvoir rotatoire du quartz étant $\alpha = 17$ degré/mm.

4.192. La lumière traverse un système de deux polaroïds croisés entre lesquels est placée une lame de quartz taillée perpendiculaire-

ment à l'axe optique. Déterminer l'épaisseur minimale de la lame telle que la lumière de longueur d'onde 436 nm soit éteinte entièrement par ce système, et la lumière de longueur d'onde 497 nm soit transmise à moitié. Le pouvoir rotatoire du quartz pour ces longueurs d'onde est respectivement égal à 41,5 et 31,1 degré/mm.

4.193. Un faisceau de lumière polarisée linéairement de longueur d'onde 589 nm passe, le long de l'axe, à travers un récipient de verre cylindrique rempli de solution de sucre, légèrement trouble, de concentration 500 g/l. En observant de côté, on voit un système de franges hélicoïdales séparées l'une de l'autre, le long de l'axe, par la distance de 50 cm. Expliquer l'apparition des franges et calculer le pouvoir rotatoire de la solution.

4.194. Une cellule de Kerr est placée entre deux nicols de façon que la direction du champ électrique **E** du condensateur fait un angle de 45° avec les directions principales des nicols. Le condensateur a une longueur $l = 10$ cm et est rempli de nitrobenzène. Le dispositif est traversé par la lumière de $\lambda = 0{,}50\ \mu$. Sachant que dans ce cas la constante de Kerr $B = 2{,}2 \cdot 10^{-10}$ cm/V², déterminer:

a) l'intensité minimale du champ électrique E du condensateur telle que l'intensité de la lumière ayant traversé la cellule demeure constante lors de la rotation du nicol analyseur;

b) le nombre d'extinctions de la lumière par seconde si le condensateur est alimenté en tension alternative de fréquence $\nu = 10$ MHz et d'amplitude d'intensité $E_0 = 50$ kV/cm.

R e m a r q u e. On appelle constante de Kerr le coefficient B dans la formule $n_e - n_0 = B\lambda E^2$.

4.195. La lumière monochromatique polarisée dans un plan, de pulsation ω passe à travers une substance le long d'un champ magnétique uniforme d'intensité H. Déterminer la différence des indices de réfraction pour les composantes du faisceau lumineux correspondant à la polarisation circulaire dextro et lévogyre si la constante de Verdet est égale à V.

4.196. Une substance se trouve dans un champ magnétique longitudinal d'un solénoïde placé entre deux polaroïds. La longueur du tube avec de la substance est $l = 30$ cm. Déterminer la constante de Verdet sachant que le champ d'intensité $H = 710$ Œ fait tourner le plan de polarisation de $\varphi_1 = +5°10'$ pour un sens du champ et de $\varphi_2 = -3°20'$ pour le sens opposé.

4.197. Un pinceau de lumière polarisée dans un plan traverse une substance lévogyre positive se trouvant dans un champ magnétique longitudinal comme l'indique la figure 182. De quel angle tourne le plan de polarisation du pinceau émergent si la longueur du tube avec de la substance est l, le pouvoir rotatoire de celle-ci α, la constante de Verdet V et l'intensité du champ magnétique H.

4.198. Un tube à benzène de longueur $l = 26$ cm se trouve dans un champ magnétique longitudinal d'un solénoïde placé entre deux polaroïds. L'angle des directions principales des polaroïds est 45°.

Déterminer l'intensité minimale du champ magnétique telle que la lumière de longueur d'onde 589 nm ne traverse ce système que dans un sens (soupape optique). Etudier le comportement de cette soupape optique lorsqu'on change le sens du champ magnétique à l'opposé.

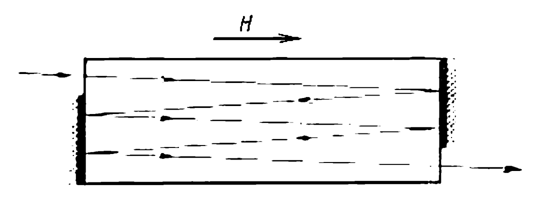


Fig. 182

4.199. Comme le montre l'expérience, un corps éclairé par une lumière de polarisation circulaire reçoit un couple de rotation (effet de Sadovski). Cela résulte du fait que la lumière en question possède un moment cinétique dont la densité de flux dans le vide est $M = I/\omega$ où I est l'intensité lumineuse, ω sa pulsation de vibration. Supposons que la lumière polarisée circulairement de longueur d'onde $\lambda = 0{,}70\ \mu$ tombe normalement sur un disque homogène noir de masse $m = 10$ mg qui peut tourner librement autour de son axe. Au bout de combien de temps sa vitesse angulaire sera-t-elle $\omega_0 = 1{,}0$ rd/s étant donné que $I = 10$ W/cm^2?

Dispersion et absorption de la lumière

4.200. Un électron libre se trouve dans le champ d'un flux lumineux monochromatique. L'intensité du flux $I = 150$ W/m^2, la pulsation de la lumière $\omega = 3{,}4\cdot10^{15}$ rd/s. Déterminer:

a) l'amplitude des vibrations de l'électron et l'amplitude de sa vitesse;

b) le rapport f_m/f_e où f_m et f_e sont des amplitudes des forces appliquées à l'électron de la part des composantes magnétique et électrique du champ de l'onde lumineuse; montrer, également, qu'il est égal à $v/2c$, où v est l'amplitude de la vitesse de l'électron, c la célérité de la lumière.

I n d i c a t i o n. Dans l'équation du mouvement de l'électron l'action de la composante magnétique du champ peut être exclue (comme on le verra par le calcul, elle est négligeable).

4.201. Une onde électromagnétique de pulsation ω se propage dans un plasma raréfié. La concentration des électrons libres dans le plasma est n_0. En négligeant l'interaction entre l'onde et les ions du plasma, établir la formule donnant:

a) la permittivité diélectrique du plasma en fonction de la pulsation;

b) la vitesse de phase dans le plasma en fonction de la longueur d'onde.

4.202. Déterminer la concentration des électrons libres dans l'ionosphère, sachant que son indice de réfraction pour les ondes électromagnétiques de fréquence $\nu = 100$ MHz est $n = 0{,}90$.

4.203. En s'appuyant sur le fait que pour un rayonnement X suffisamment dur les électrons d'une substance peuvent être supposés libres, calculer de combien diffère de l'unité l'indice de réfraction du graphite pour les rayons X de longueur d'onde $\lambda = 50$ pm dans le vide.

4.204. Un électron sollicité par une force quasi-élastique kx et une « force de frottement » $\gamma\dot{x}$ se trouve dans le champ d'un rayonnement électromagnétique. La composante E du champ est une fonction du temps donnée par $E = E_0 \cos \omega t$. En négligeant l'influence de la composante magnétique du champ déterminer:

a) l'équation du mouvement de l'électron;

b) la puissance moyenne absorbée par l'électron; la pulsation pour laquelle elle est maximale et l'expression de la puissance moyenne maximale.

4.205. Dans nombre de cas la constante diélectrique d'une substance est une quantité complexe ou négative et l'indice de réfraction est alors complexe ($n' = n + i\varkappa$) ou purement imaginaire ($n' = i\varkappa$). Ecrire l'équation de l'onde plane pour ces cas et expliquer le sens physique de ces indices de réfraction.

4.206. En sondant un plasma raréfié avec les ondes hertziennes de fréquences variées on a découvert que les ondes de $\lambda > \lambda_0 = 0{,}75$ m subissaient une réflexion totale. En déduire la concentration des électrons libres dans ce plasma.

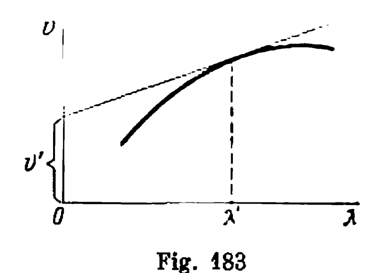


Fig. 183

4.207. En partant de la définition de la vitesse de groupe $u = d\omega/dk$, montrer que $u = v - \lambda\,(dv/d\lambda)$, où v est la vitesse de phase, λ, la longueur d'onde. Montrer également qu'au voisinage de $\lambda = \lambda'$, u est égale au segment v' défini par la tangente à la courbe $v(\lambda)$ en un point λ' (fig. 183).

4.208. Etablir la relation entre la vitesse de groupe u et celle de phase v pour les lois de dispersion suivantes:

$$\text{a) } v = a/\sqrt{\lambda}; \quad \text{b) } v = bk; \quad \text{c) } v = c/\omega^2.$$

Ici a, b et c sont certaines constantes; λ, k et ω sont respectivement la longueur d'onde, le nombre d'onde et la pulsation.

4.209. Dans un certain milieu la relation entre les vitesses de groupe et de phase d'une onde électromagnétique est donnée par $uv = c^2$ où c est la célérité de la lumière dans le vide. Déterminer la permittivité diélectrique de ce milieu en fonction de la pulsation d'onde $\varepsilon(\omega)$.

4.210. L'indice de réfraction du sulfure de carbone pour les radiations de longueurs d'onde 509, 534 et 589 nm prend respectivement les valeurs 1,647, 1,640 et 1,630. Calculer les vitesses de phase et de groupe de la lumière au voisinage de $\lambda = 534$ nm.

4.211. Une impulsion lumineuse plane se propage dans un milieu tel que la vitesse de phase v est une fonction linéaire de la longueur d'onde λ: $v = a + b\lambda$, a et b étant certaines constantes positives. Montrer que dans un tel milieu l'impulsion lumineuse arbitraire reprend sa forme dans un intervalle de temps $\tau = 1/b$.

4.212. Un faisceau de lumière naturelle d'intensité I_0 attaque un système de deux nicols croisés entre lesquels un tube contenant une certaine solution se trouve dans un champ magnétique longitudinal d'intensité H. La longueur du tube est l, le facteur linéaire d'absorption de la solution $\varkappa$ et la constante de Verdet V. Déterminer l'intensité de la lumière émergente.

4.213. Une onde lumineuse plane monochromatique d'intensité I_0 tombe normalement sur une lame à faces planes parallèles dont chaque face possède un facteur de réflexion ρ. Compte tenu des réflexions multiples déterminer l'intensité de la lumière transmise sachant que:

a) la lame est parfaitement transparente (absorption nulle);

b) le facteur linéaire d'absorption est $\varkappa$ et l'épaisseur de la lame d.

4.214. On fabrique deux lames d'épaisseurs $d_1 = 3{,}8$ mm et $d_2 = 9{,}0$ mm d'une certaine substance. En introduisant tour à tour ces lames dans un faisceau de lumière monochromatique on trouve que la première lame transmet $D_1 = 0{,}84$ du flux lumineux, la seconde $D_2 = 0{,}70$. Déterminer le facteur linéaire d'absorption de cette substance. La lumière tombe sous l'incidence normale.

4.215. Un faisceau monochromatique traverse une pile de $N = 5$ lames de verre identiques à faces planes parallèles. Le facteur de réflexion sur chaque surface est $\rho = 0{,}050$, l'épaisseur de chaque lame $l = 0{,}50$ cm. Le rapport de l'intensité de la lumière transmise par cette pile de lames à l'intensité de la lumière incidente $\eta = 0{,}55$. En négligeant les réflexions secondaires, déterminer le facteur d'absorption du verre considéré.

4.216. Un faisceau de lumière monochromatique tombe normalement sur la surface d'une lame à faces planes parallèle d'épaisseur l. Le facteur d'absorption de la substance de la lame varie linéairement le long de la normale à sa surface de $\varkappa_1$ à $\varkappa_2$. Le facteur de réflexion par chaque face est ρ. En négligeant les réflexions secondaires, déterminer le facteur de transmission de cette lame.

4.217. Un faisceau lumineux d'intensité I_0 attaque normalement une lame transparente à faces planes parallèles d'épaisseur l. Le faisceau comprend toutes les longueurs d'onde dans la gamme de λ_1 à λ_2 de même intensité spectrale. Déterminer l'intensité du faisceau transmis par la lame sachant que dans cette gamme de longueurs d'onde le facteur d'absorption est une fonction linéaire de λ dans les

limites de $\varkappa_1$ à $\varkappa_2$ et que le facteur de réflexion par chaque face est ρ. On néglige les réflexions secondaires.

4.218. Un filtre représente une lame d'épaisseur d dont le facteur d'absorption est fonction de la longueur d'onde: $\varkappa(\lambda) = \alpha(1 - \lambda/\lambda_0)^2$ cm^{-1} où α et λ_0 sont certaines constantes. Déterminer la largeur de la bande passante de ce filtre $\Delta\lambda$ telle que l'affaiblissement de la lumière aux bords de la bande est η fois plus grand que celui pour λ_0. Le facteur de réflexion sur les faces du filtre est supposé le même pour toutes les longueurs d'ondes.

4.219. Une source monochromatique ponctuelle émettant un flux lumineux Φ est placée au centre d'une couche sphérique de substance dont les rayons intérieur et extérieur sont respectivement r_1 et r_2. Le facteur d'absorption linéaire de la substance est $\varkappa$, le facteur de réflexion par les surfaces ρ. En négligeant les réflexions secondaires, déterminer l'intensité de la lumière émergente.

4.220. De combien diminue l'intensité d'un pinceau de rayons X de longueur d'onde 20 pm lors du passage à travers une lame de plomb d'épaisseur $d = 1{,}0$ mm, le facteur massique d'atténuation pour la longueur d'onde donnée étant $\mu/\rho = 3{,}6$ cm^2/g?

4.221. Un pinceau de rayons X de longueur d'onde 62 pm traverse un écran en aluminium d'épaisseur 2,6 cm. Quelle épaisseur doit posséder un écran de plomb produisant la même atténuation du pinceau donné? Les facteurs massiques d'atténuation de l'aluminium et du plomb pour ce rayonnement sont respectivement 3,48 et 72,0 cm^2/g.

4.222. Déterminer pour l'aluminium l'épaisseur de la couche atténuation moitié pour un pinceau de rayons X monochromatiques, le facteur massique d'atténuation étant $\mu/\rho = 0{,}32$ cm^2/g.

4.223. Combien de couches atténuation moitié y a-t-il dans une lame qui affaiblit l'intensité d'un pinceau de rayons X de $\eta = 50$ fois?

Optique des sources en mouvement

4.224. Dans l'expérience de Fizeau la distance entre la roue dentée et le miroir est $l = 7{,}0$ km, le nombre de dents $z = 720$. Les deux extinctions consécutives de la lumière s'observent lorsque la roue fait $n_1 = 283$ et $n_2 = 313$ tr/s. En déduire la célérité de la lumière.

4.225. Une source lumineuse se déplace avec une vitesse v par rapport au récepteur. Montrer que pour $v \ll c$ la variation relative de pulsation de la lumière $\Delta\omega/\omega = (v/c)\cos\vartheta$ où ϑ est l'angle fait par la direction du mouvement de la source avec la ligne d'observation.

4.226. L'une des raies spectrales émises par les ions excités He^+ a la longueur d'onde $\lambda = 0{,}410$ nm. Déterminer le déplacement de Doppler $\Delta\lambda$ de cette raie lorsqu'on l'observe sous un angle $\vartheta = 30°$ au faisceau d'ions en mouvement d'énergie cinétique $T = 10$ MeV.

4.227. En observant la raie spectrale $\lambda = 0{,}59\ \mu$ dans les directions menées aux bords opposés du disque solaire au niveau de son équateur on a relevé une différence des longueurs d'onde de $\delta\lambda = 8{,}0$ pm. En déduire la période de révolution du Soleil autour de son axe.

4.228. Grâce à l'effet Doppler on a su découvrir les étoiles doubles tellement éloignées qu'il était impossible de les distinguer au télescope. Les raies spectrales de ces étoiles se doublant périodiquement on conclut que les sources en sont deux étoiles gravitant autour de leur centre de masse. En supposant égales les masses des deux étoiles, déterminer leur distance et leurs masses si le dédoublement maximal des raies spectrales est $(\Delta\lambda/\lambda)_{max} = 1{,}2\cdot10^{-4}$ et se reproduit tous les $\tau = 30$ jours.

4.229. Une onde électromagnétique plane de pulsation ω_0 attaque normalement la surface d'un miroir se déplaçant à sa rencontre avec une vitesse relativiste V. En se servant de la formule de Doppler, trouver la pulsation de l'onde réfléchie. Simplifier l'expression obtenue pour le cas où $V \ll c$.

4.230. Un radar fonctionne à l'onde de longueur $\lambda = 50{,}0$ cm. Déterminer la vitesse d'un avion qui s'approche si la fréquence des battements entre le signal de l'émetteur et le faisceau réfléchi par l'avion est égale à $\Delta\nu = 1{,}00$ kHz au point du radar.

4.231. Sachant que la phase d'onde $\omega t - kx$ est un invariant, i.e. ne varie pas lors du passage d'un référentiel galiléen à un autre, déterminer de quelle façon se transforment alors la pulsation ω et le nombre d'onde k qu'elle renferme. Etudier le cas unidimensionnel.

4.232. Avec quelle vitesse s'éloigne de nous une certaine nébuleuse si l'on sait que la raie de l'hydrogène $\lambda = 434$ nm de son spectre subit un déplacement vers le rouge de 130 nm?

4.233. Avec quelle vitesse devrait se déplacer une voiture pour que le feu rouge ($\lambda \approx 0{,}70\ \mu$) vire au vert ($\lambda' = 0{,}55\ \mu$)?

4.234. Devant un observateur animé d'une vitesse $v_1 = {}^1/_2\, c$ suivant une certaine droite se déplace, dans les mêmes sens et direction, une source de lumière monochromatique animée d'une vitesse $v_2 = {}^3/_4\, c$. La pulsation propre de la lumière est ω_0. Déterminer la pulsation de la lumière mesurée par l'observateur.

4.235. L'une des raies spectrales de l'hydrogène atomique a la longueur d'onde $\lambda = 656{,}3$ nm. Déterminer le déplacement de Doppler $\Delta\lambda$ pour cette raie, lorsqu'on l'observe sous un angle droit par rapport au faisceau d'atomes d'hydrogène d'énergie cinétique $T = 1{,}0$ MeV (effet Doppler transversal).

4.236. Une source émettant des signaux électromagnétiques de pulsation propre $\omega_0 = 3{,}0\cdot10^{10}$ rd/s est animée d'une vitesse constante $v = 0{,}80\ c$ le long d'une droite éloignée à la distance l d'un opérateur immobile (fig. 184). Déterminer la pulsation des signaux captés par l'opérateur à l'instant où:

a) la source se trouvera au point O;

b) l'opérateur le verra au point O.

4.237. Un pinceau d'électrons passe au voisinage immédiat de la surface d'un miroir métallique sur lequel est tracé un réseau de diffraction de période $d = 2,0\ \mu$. Les électrons se déplacent avec une vitesse v voisine de c, perpendiculairement aux traits du réseau. On observe alors un rayonnement visible: la trajectoire des électrons se présente comme une bandelette dont la coloration varie en fonction de l'angle d'observation ϑ (fig. 185). Expliquer le phénomène. Déterminer la longueur d'onde du rayonnement observé pour $\vartheta = 45°$.

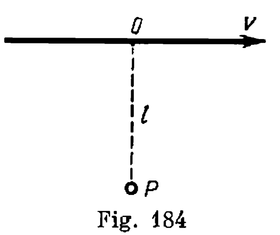


Fig. 184

4.238. Un gaz se compose des atomes de masse m en équilibre thermodynamique à la température T. Soit ω_0 la pulsation propre de la lumière émise par les atomes.

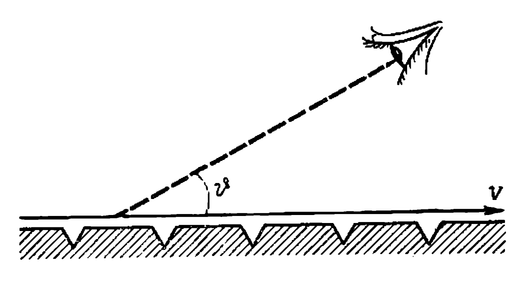


Fig. 185

1) Montrer que la distribution spectrale de la lumière émise est donnée par la formule

$$I_\omega = I_0 e^{-a(1-\omega/\omega_0)^2},$$

où I_0 est l'intensité spectrale correspondant à la pulsation ω_0 et $a = mc^2/2kT$.

2) Déterminer la largeur relative $\Delta\omega/\omega_0$ de la raie spectrale donnée, i.e. la largeur de la raie entre les pulsations pour lesquelles $I_\omega = I_0/2$.

4.239. Dans un milieu animé d'une vitesse constante $V \ll c$ par rapport à un référentiel galiléen K se propage une onde électromagnétique plane. Déterminer la célérité de cette onde dans le référentiel K en sachant que l'indice de réfraction du milieu est n et la direction de la propagation de l'onde coïncide avec celle du mouvement du milieu.

4.240. L'aberration de la lumière consiste en ce que les étoiles observées semblent être déplacées de leur position vraie sur la sphère céleste (à cause du mouvement orbital de la Terre). La direction menée à l'étoile dans le plan de l'écliptique varie périodiquement de sorte que l'étoile effectue des oscillations virtuelles dans les limites de l'angle $\delta\vartheta = 41''$. Trouver la vitesse de la Terre sur l'orbite.

4.241. Montrer que l'angle ϑ entre la direction de la propagation de la lumière et l'axe des x se transforme, lors du passage du référentiel K au K', conformément à la formule

$$\cos\vartheta' = \frac{\cos\vartheta - \beta}{1 - \beta\cos\vartheta},$$

où $\beta = V/c$, V est la vitesse du référentiel K' par rapport à K. Les axes des x et des x' des deux référentiels coïncident.

4.242. Déterminer le demi-angle d'ouverture du cône dans lequel l'observateur terrestre voit des étoiles se trouvant dans l'hémisphère si l'on se déplace par rapport à la Terre avec une vitesse relativiste différant de celle de la lumière de 1 %. Se servir de la formule du problème précédent.

4.243. Une particule chargée se meut suivant l'axe des y conformément à la loi $y = \cos \omega t$. Le point d'observation P se trouve sur l'axe des x à la distance l de la particule ($l \gg a$). Déterminer le rapport des densités du flux de rayonnement électromagnétique I_1/I_2 au point P aux instants où l'ordonnée de la particule est $y_1 = 0$ et $y_2 = a$. Calculer ce rapport pour $\omega = 3{,}3 \cdot 10^6$ rd/s et $l = 190$ m.

4.244. Une particule chargée décrit uniformément, à la vitesse v, une circonférence de rayon R dans le plan xy (fig. 186). Un opérateur

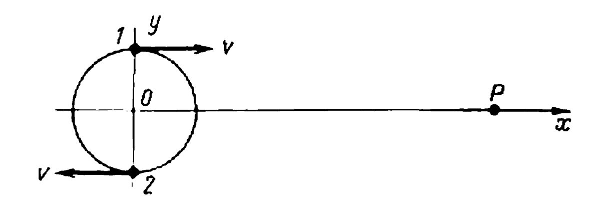


Fig. 186

se trouve sur l'axe des x, en un point situé à une distance du centre de la circonférence de beaucoup supérieure à R. Trouver:

a) la relation entre les valeurs observées de la projection y de l'accélération de la particule et son ordonnée y;

b) le rapport des densités du flux de rayonnement électromagnétique au point P aux instants où, selon l'opérateur P, la particule s'approche de lui ou s'en éloigne, comme le montre la figure.

4.245. Une particule chargée se déplaçant uniformément dans un milieu d'indice de réfraction n peut émettre de la lumière sous certaines conditions (effet Cerenkov-Vavilov). Déterminer:

a) ces conditions ainsi que la direction du rayonnement en considérant les interférences des vibrations excitées par la particule aux différents moments du temps;

b) la vitesse de la particule chargée dans l'eau lorsqu'elle émet de la lumière sous un angle $\vartheta = 15°$ à la direction de son mouvement.

4.246. Soient deux sources noires de rayonnement thermique. Une d'elles a la température $T_1 = 2\,500$ K. Déterminer la température de l'autre source sachant que la longueur d'onde correspondant au maximum de son pouvoir émissif est de $\Delta\lambda = 0{,}50\ \mu$ supérieure à la longueur d'onde correspondante de la première source.

4.247. La luminance énergétique d'un corps noir est 3,0 W/cm². Déterminer la longueur d'onde correspondant au maximum du pouvoir émissif de ce corps.

4.248. Le rayonnement du Soleil a un spectre dont la composition est voisine de celui du corps noir dont le maximum du pouvoir émissif correspond à la longueur d'onde $0{,}48\ \mu$. Déterminer la masse que le Soleil perd par rayonnement par seconde. Evaluer le temps au bout duquel la masse du Soleil aura diminué de 1 %.

4.249. Une petite bille de cuivre de diamètre $d = 1{,}2$ cm est placée dans un récipient à vide dont les parois sont maintenues à la température voisine du zéro absolu. La température initiale de la bille $T_0 = 300$ K. Assimilant la surface de la bille au corps noir, déterminer le temps au bout duquel sa température diminue de $\eta = 2{,}0$ fois.

4.250. On a deux cavités (fig. 187) ayant chacune un petit trou de même diamètre $d = 1{,}0$ cm et dont les surfaces extérieures sont

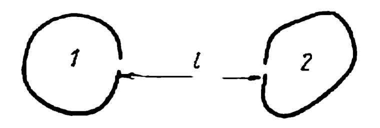


Fig. 187

parfaitement réflectrices. La distance des trous $l = 10$ cm. Dans la cavité *1* est maintenue une température constante $T_1 = 1\,700$ K. Calculer la température qui s'établit dans la cavité *2*.

4.251. Une cavité de volume $V = 1{,}0$ l est le siège d'un rayonnement thermique à la température $T = 1000$ K. Déterminer:

a) la chaleur spécifique c_V;

b) l'entropie S de ce rayonnement.

4.252. En partant de la formule de Planck déduire les expressions approchées de la densité spectrale volumique de rayonnement u_ω:

a) dans le domaine où $\hbar\omega \ll kT$ (formule de Rayleigh-Jeans);

b) dans le domaine où $\hbar\omega \gg kT$ (formule de Wien).

4.253. Transformer la formule de Planck de la densité spectrale volumique de rayonnement u_ω en passant de la variable ω aux variables ν (fréquence) et λ (longueur d'onde).

4.254. Déterminer à l'aide de la formule de Planck la densité de flux émis par une unité de surface d'un corps noir, correspondant à un étroit intervalle de longueurs d'onde $\Delta\lambda = 1{,}0$ nm au voisinage

du maximum de la densité spectrale de rayonnement pour la température du corps $T = 3000$ K.

4.255. La fig. 188 donne le diagramme de la fonction $y(x)$ qui caractérise la partie relative de la puissance totale du rayonnement thermique correspondant à l'intervalle spectral de 0 à x. Ici $x = \lambda/\lambda_m$

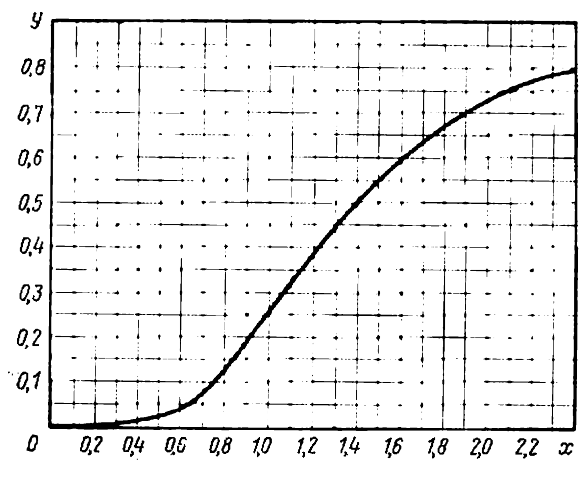


Fig. 188

(λ_m est la longueur d'onde correspondant au maximum de la densité spectrale). Déterminer à l'aide de ce diagramme:

a) la longueur d'onde qui partage le spectre du rayonnement en deux parties énergétiquement équivalentes pour la température de 3 700 K;

b) la partie de la puissance totale du rayonnement qui correspond au domaine visible du spectre (0,40 à 0,76 μ) pour la température 5000 K;

c) de combien de fois augmente la puissance du rayonnement dans le domaine de longueurs d'onde $\lambda > 0,76$ μ si la température croît de 3000 à 5000 K?

4.256. Etablir à l'aide de la formule de Planck les expressions donnant le nombre de quanta par 1 cm³ d'une cavité portée à la température T, dans les intervalles spectraux $(\omega, \omega + d\omega)$ et $(\lambda, \lambda + d\lambda)$.

4.257. Une source de lumière ponctuelle et isotrope de puissance $P = 10$ W émet un rayonnement de $\lambda = 589$ nm. Déterminer:

a) la puissance moyenne du flux de photons à la distance $r = 2,0$ m de la source;

b) la distance de la source à un point où la densité volumique moyenne de photons est $n = 100$ cm^{-3}.

4.258. Une courte impulsion lumineuse d'énergie $E = 7,5$ J sous forme d'un pinceau presque parallèle tombe sur une lame réfléchissante dont le facteur de réflexion est $\rho = 0,60$. L'angle d'inci-

dence i 30°. Déterminer, dans l'hypothèse corpusculaire, l'impulsion transmise à la lame.

4.259. Une onde lumineuse plane d'intensité $I = 0{,}2$ W/cm^2 attaque une surface plane réfléchissante de facteur de réflexion $\rho = 0{,}8$. L'angle d'incidence $\vartheta = 45°$. Déterminer, dans l'hypothèse corpusculaire, la grandeur de la pression normale exercée par la lumière sur cette surface.

4.260. Une onde lumineuse plane d'intensité $I = 0{,}70$ W/cm^2 éclaire une sphère réfléchissante de rayon $R = 5{,}0$ cm. Le facteur de réflexion est égal à l'unité. Déterminer, dans l'hypothèse corpusculaire, la force appliquée à la sphère.

4.261. Dans un référentiel K un photon de pulsation ω rencontre un miroir qui s'en approche avec une vitesse relativiste V. Trouver l'impulsion transmise au miroir lors de la réflexion du photon :

a) dans le référentiel lié au miroir ;

d) dans le référentiel K.

4.262. Un petit miroir, parfaitement réflecteur, de masse $m = 10$ mg est suspendu à un fil sans masse de longueur $l = 10$ cm. Un laser envoie dans la direction horizontale une courte impulsion d'énergie $E = 13$ J normale au miroir. Déterminer l'angle dont s'écarte le fil après le « coup de laser ». Quelle est l'origine de l'énergie cinétique acquise par le miroir?

4.263. Un photon de pulsation ω_0 est émis par la surface d'une étoile de masse M et de rayon R. Déterminer la valeur du déplacement gravitationnel de la pulsation du photon $\Delta\omega/\omega_0$ à une très grande distance de l'étoile.

4.264. Lorsque la tension appliquée aux électrodes d'un tube aux rayons X augmente de $\eta = 1{,}5$ fois, la longueur d'onde de la limite du spectre continu des rayons X du côté des ondes courtes varie de $\Delta\lambda = 26$ pm. Déterminer la tension initiale sur le tube.

4.265. Un pinceau de rayons X tombe sur un monocristal NaCl. L'angle de glissement minimal pour lequel on observe encore la réflexion spéculaire du système de plans réticulaires de distance $d = 0{,}28$ nm est égal à $\vartheta = 4{,}1°$. Trouver la tension sur le tube aux rayons X.

4.266. Déterminer la longueur d'onde de la limite d'ondes courtes du spectre continu des rayons X sachant que la vitesse des électrons s'approchant de l'anticathode du tube est $v = 0{,}85\ c$ où c est la célérité de la lumière.

4.267. Déterminer le seuil de l'effet photoélectrique pour le zinc et la vitesse maximale des photoélectrons arrachés de la surface du zinc par le rayonnement électromagnétique de longueur d'onde 250 nm.

4.268. En éclairant la surface d'un certain métal successivement par la lumière de longueurs d'onde $\lambda_1 = 0{,}35\ \mu$ et $\lambda_2 = 0{,}54\ \mu$, on établit que les vitesses maximales correspondantes des photoélectrons diffèrent l'une de l'autre de $\eta = 2{,}0$ fois. Déterminer le travail d'extraction.

4.269. Quel potentiel maximal acquérira une petite bille de cuivre éloignée des autres corps irradiée par un rayonnement électromagnétique de $\lambda = 140$ nm?

4.270. Déterminer l'énergie cinétique maximale des photoélectrons arrachés de la surface du lithium par un rayonnement électromagnétique dont l'intensité de la composante champ électrique varie avec le temps conformément à la loi $E = a\,(1 + \cos \omega t) \cos \omega_0 t$ où a est une constante, $\omega = 6{,}0 \cdot 10^{14}$ rd/s et $\omega_0 = 3{,}60 \cdot 10^{15}$ rd/s.

4.271. Une cellule photoélectrique travaillant en régime de saturation est éclairée à la lumière de longueur d'onde $\lambda = 0{,}30$ μ. La sensibilité spectrale correspondante de la cellule est $J = 4{,}8$ mA/W. Déterminer le rendement quantique, i.e. le nombre de photoélectrons rapporté à un photon incident.

4.272. Soit une cellule photoélectrique à vide dont une électrode est en césium, l'autre en cuivre. On court-circuite les deux électrodes. Déterminer la vitesse maximale des photoélectrons s'approchant de l'électrode en cuivre, celle en césium étant éclairée par le rayonnement électromagnétique de longueur d'onde 0,22 μ.

4.273. Un courant photoélectrique, apparaissant dans le circuit d'une cellule photoélectrique à vide à la suite de l'éclairement de l'électrode de zinc par un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde 262 nm, cesse lorsqu'on applique une tension d'arrêt extérieure de 1,5 V. Déterminer la grandeur et la polarité de la d.d.p. de contact extérieur.

4.274. Composer l'expression d'une grandeur ayant la dimension de la longueur, en se servant de la célérité de la lumière c, de la masse d'électron m et de la constante de Planck $\hbar$. Quelle est cette grandeur?

4.275. Montrer à l'aide des lois de la conservation que l'électron libre ne peut absorber complètement le photon.

4.276. Expliquer les particularités suivantes de la diffusion Compton :

a) la valeur du déplacement $\Delta\lambda$ est indépendante de la nature de la substance diffusante ;

b) l'intensité de la composante déplacée de la lumière diffuse croît avec la diminution du nombre atomique de la substance ainsi qu'avec l'accroissement de l'angle de diffusion ;

c) le rayonnement diffusé comprend une composante non déplacée.

4.277. Un pinceau étroit de rayons X monochromatiques tombe sur un corps diffusant. Les longueurs d'onde du rayonnement diffusé sous les angles $\vartheta_1 = 60°$ et $\vartheta_2 = 120°$, diffèrent l'une de l'autre de $\eta = 2{,}0$ fois. En supposant qu'on a la diffusion par les électrons libres, déterminer la longueur d'onde du rayonnement incident.

4.278. Un photon d'énergie $\varepsilon = 1{,}00$ MeV est diffusé par un électron libre au repos. Déterminer l'énergie cinétique de l'électron de recul si la variation de longueur d'onde du photon due à la diffusion constitue $\eta = 25$ %.

4.279. Un photon de longueur d'onde $\lambda = 6{,}0$ nm est diffusé sous un angle droit par un électron libre au repos. Déterminer :

a) la pulsation du photon diffusé ;

b) l'énergie cinétique de l'électron de recul.

4.280. Un photon d'énergie $\hbar\omega = 250$ keV est diffusé sous un angle $\vartheta = 120°$ par un électron libre initialement au repos. Déterminer l'énergie du photon diffusé.

4.281. Déterminer la longueur d'onde d'un rayonnement X étant donné que l'énergie cinétique maximale des électrons Compton $T_{max} = 0{,}19$ MeV.

4.282. Un photon d'énergie $\hbar\omega = 0{,}15$ MeV est diffusé par un électron libre, initialement au repos ; il en résulte la variation de sa longueur d'onde de $\Delta\lambda = 3{,}0$ pm. Déterminer l'angle sous lequel est expulsé l'électron Compton.

4.283. Un photon d'énergie $\eta = 2{,}0$ fois supérieure à l'énergie au repos d'un électron subit une collision de front avec un électron libre au repos. Déterminer le rayon de courbure de la trajectoire de l'électron de recul dans un champ magnétique de $B = 0{,}12$ T. On suppose que l'électron de recul se déplace perpendiculairement à la direction du champ.

PARTIE 5

PHYSIQUE ATOMIQUE

Atome de Rutherford-Bohr

5.1. Calculer, d'après le modèle de Thomson, le rayon de l'atome d'hydrogène et la longueur d'onde de la lumière qu'émet ce dernier en sachant que l'énergie d'ionisation de l'atome $E = 13{,}6$ eV.

5.2. Une particule alpha d'énergie cinétique 0,27 MeV est diffusée sous un angle de 60° par une feuille d'or. Déterminer la valeur correspondante du paramètre de visée.

5.3. A quelle distance minimale s'approche une particule α d'énergie cinétique $T = 0{,}40$ MeV (collision de front) :

a) d'un noyau lourd de l'atome de plomb au repos ;

b) d'un noyau léger libre Li^7 initialement au repos.

5.4. Une particule α d'énergie cinétique $T = 0{,}50$ MeV est diffusée sous un angle $\vartheta = 90°$ par un champ coulombien d'un noyau immobile de l'atome de mercure. Déterminer :

a) le rayon de courbure minimal de sa trajectoire ;

b) la distance minimale à laquelle elle s'approche du noyau.

5.5. Un proton d'énergie cinétique T et de paramètre de visée b est diffusé par un champ coulombien d'un noyau immobile de l'atome d'or. Déterminer l'impulsion transmise au noyau à la suite de la diffusion.

5.6. Une particule d'énergie cinétique T est diffusée par un puits de potentiel sphérique de rayon R et de profondeur U_0, i.e. par un champ dans lequel l'énergie potentielle de la particule a pour expression

$$U(r) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r > R, \\ -U_0 & \text{pour } r < R, \end{cases}$$

où r est la distance du centre du puits. Etablir la relation entre le paramètre de visée de la particule b et l'angle dont elle s'écarte de sa direction initiale.

5.7. Une sphère immobile de rayon R est irradiée par un faisceau parallèle de particules de rayon r. En admettant parfait le choc entre la particule et la sphère, déterminer :

a) l'angle ϑ de la déviation de la particule en fonction de son paramètre de visée b ;

b) la fraction relative des particules diffusées dans l'intervalle des angles compris entre ϑ, $\vartheta + d\vartheta$;

c) la probabilité de la diffusion d'une particule dans l'hémisphère avant ($\vartheta < \pi/2$).

5.8. Un pinceau de particules α d'énergie cinétique 1,0 MeV tombe normalement sur une feuille de platine d'épaisseur 1,0 μ. On observe les particules diffusées sous un angle de 60° par rapport à la direction du pinceau incident à l'aide d'un compteur muni d'une ouverture d'entrée ronde, d'aire 1,0 cm^2, placée à la distance de 10 cm de la région diffusante de la feuille. Quelle fraction des particules α est reçue par l'ouverture du compteur?

5.9. Un pinceau de particules α d'énergie cinétique T = 0,50 MeV et d'intensité $I = 5{,}0 \cdot 10^5$ particules par seconde tombe normalement sur une feuille d'or. Déterminer son épaisseur sachant qu'à la distance r = 15 cm de la région diffusante et sous un angle $\vartheta = 60°$ à la direction du faisceau incident la densité du faisceau de particules diffusées est j = 40 particules/(cm$^2 \cdot$s).

5.10. Un pinceau de particules α tombe normalement sur une feuille d'argent. Derrière celle-ci est placé un compteur, enregistreur des particules diffusées en conformité avec la formule de Rutherford. Lorsqu'on remplace la feuille d'argent par celle de platine de même épaisseur massique, le nombre de particules enregistrées en une unité de temps croît de η = 1,52 fois. Déterminer le numéro atomique du platine sachant celui de l'argent et les masses atomiques des deux éléments.

5.11. Un pinceau étroit de particules α d'énergie cinétique T = 0,50 MeV tombe normalement sur une feuille d'or dont l'épaisseur massique est ρd = 1,5 mg/cm^2. L'intensité du pinceau $I_0 = 5{,}0 \cdot 10^5$ particules/s. Déterminer le nombre de particules α diffusées par la feuille au bout de τ = 30 mn dans les intervalles d'angles:

a) 59 à 61°;

b) supérieurs à 60°.

5.12. Un pinceau étroit de protons animés de la vitesse $v = 6 \cdot 10^6$ m/s tombe normalement sur une feuille d'argent d'épaisseur d = 1,0 μ. Déterminer la probabilité de la diffusion des protons dans l'hémisphère arrière ($\vartheta > 90°$).

5.13. Un pinceau étroit de particules α d'énergie cinétique T = 600 keV tombe normalement sur une feuille d'or comportant $n = 1{,}1 \cdot 10^{19}$ noyaux/cm^2. Déterminer le nombre relatif de particules α diffusées sous les angles $\vartheta < \vartheta_0 = 20°$.

5.14. Déterminer la section efficace du noyau de l'atome d'uranium correspondant à la diffusion des particules d'énergie cinétique T = 1,5 MeV sous les angles supérieurs à 60°.

5.15. La section efficace du noyau de l'atome d'or, correspondant à la diffusion des particules α monoénergétiques sous les angles contenus dans l'intervalle de 90° à 180°, est égale à $\Delta\sigma$ = 0,50 kbarn. Déterminer:

a) l'énergie des particules α;

b) la section différentielle de diffusion $d\sigma/d\Omega$ (kbarn/sr) correspondant à l'angle $\vartheta = 60°$.

5.16. D'après l'électrodynamique classique, l'énergie que perd par émission un électron animé d'une accélération **w** est donnée par

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3}\mathrm{w}^2,$$

où e est la charge de l'électron, c, la célérité de la lumière. Évaluer le temps au bout duquel l'énergie de l'électron effectuant des vibrations, voisines des harmoniques de pulsation $\omega = 5\cdot10^{15}$ rd/s, diminue de $\eta = 10$ fois.

5.17. En exploitant la formule du problème précédent, évaluer le temps au bout duquel un électron décrivant une orbite circulaire de rayon $r = 50$ pm autour du noyau d'hydrogène tombera sur le noyau. On admet, pour simplifier, que le vecteur **w** soit constamment dirigé vers le centre de l'atome.

5.18. Dans le spectre de l'hydrogène atomique sont connues les longueurs d'onde de trois raies : 97,26 ; 102,58 et 121,57 nm. Déterminer les longueurs d'onde des autres raies du spectre pouvant être prévues à partir de ces trois raies.

5.19. Une particule de masse m décrit une orbite circulaire dans un champ potentiel à symétrie centrale $U(r) = kr^2/2$. Déterminer à l'aide de la règle de quantification des orbites de Bohr les rayons admissibles des orbites et les niveaux énergétiques de la particule.

5.20. Calculer pour un atome d'hydrogène et pour un ion He^+ :

a) le rayon de la première orbite de Bohr et la vitesse d'un électron la décrivant ;

b) l'énergie cinétique et l'énergie de liaison d'un électron en état fondamental ;

c) le potentiel d'ionisation, le premier potentiel d'excitation et la longueur d'onde de la raie de résonance ($n' = 2 \to n = 1$).

5.21. Calculer la pulsation de la révolution de l'électron sur la seconde orbite de Bohr de l'ion He^+.

5.22. Déterminer pour les systèmes hydrogénoïdes le moment magnétique μ_n correspondant au mouvement de l'électron suivant la n-ème orbite ainsi que le rapport des moments magnétique et mécanique μ_n/M_n. Calculer le moment magnétique d'un électron se trouvant sur la première orbite de Bohr.

5.23. Calculer et représenter en échelle de longueurs d'onde les intervalles spectraux contenant les séries de Lyman, de Balmer et de Paschen pour l'hydrogène atomique. Indiquer, sur cette échelle, le domaine visible du spectre.

5.24. Calculer pour l'hydrogène atomique :

a) les longueurs d'onde des trois premières raies de la série de Balmer ;

b) le pouvoir séparateur minimal $\lambda/\delta\lambda$ d'un appareil spectral permettant de distinguer les premières 20 raies de la série de Balmer.

5.25. Le rayonnement de l'hydrogène atomique attaque normalement un réseau de diffraction de largeur $l = 6{,}6$ mm. Dans le spectre observé sous un certain angle de diffraction ϑ, la 48-ème raie de la série de Balmer s'est trouvée à la limite de résolution (d'après le critère de Rayleigh). Déterminer cet angle.

5.26. A quel élément appartient un spectre hydrogénoïde dont les longueurs d'onde des raies sont quatre fois plus courtes que celles de l'hydrogène atomique?

5.27. Combien de raies spectrales émet l'hydrogène atomique excité à n-ème niveau énergétique?

5.28. Déterminer le nombre quantique n correspondant à l'état excité de l'ion He^+ si, en passant à l'état fondamental, cet ion a émis deux photons consécutifs de longueurs d'onde 108,5 et 30,4 nm.

5.29. Calculer la constante de Rydberg (en cm^{-1}) en sachant que pour les ions He^+ la différence de longueur d'onde entre les raies de tête des séries de Balmer et de Lyman $\Delta\lambda = 133{,}7$ nm.

5.30. Pour quel ion hydrogénoïde la différence de longueur d'onde entre les raies de tête des séries de Balmer et de Lyman est égale à 59,3 nm?

5.31. Déterminer la longueur d'onde de la raie de tête d'une série spectrale des ions He^+ telle que l'intervalle entre les raies extrêmes soit $\Delta\omega = 5{,}18 \cdot 10^{15}$ rd/s.

5.32. L'énergie de liaison d'un électron dans l'atome de He est $E_0 = 24{,}6$ eV. Déterminer l'énergie nécessaire pour arracher les deux électrons à cet atome.

5.33. Quelle énergie cinétique minimale doit posséder un atome d'hydrogène, en mouvement, pour que lors d'un choc central mou contre un autre atome d'hydrogène, immobile, l'un d'eux soit capable d'émettre un photon. Avant la rencontre les deux atomes sont à l'état fondamental.

5.34. Un atome d'hydrogène au repos a émis un photon correspondant à la raie de tête de la série de Lyman. Quelle est la vitesse acquise par l'atome?

5.35. Dans l'énoncé du problème précédent, calculer, en p. cent, de combien diffère l'énergie du photon émis de celle de la transition correspondante dans l'atome.

5.36. Un ion He^+ immobile a émis un photon correspondant à la raie de tête de la série de Lyman. Ce photon a arraché un photoélectron à un atome d'hydrogène immobile, à l'état fondamental. Déterminer la vitesse du photoélectron.

5.37. En tenant compte du mouvement du noyau de l'atome d'hydrogène, établir les expressions de l'énergie de liaison d'un électron à l'état fondamental et de la constante de Rydberg. De combien de p. cent l'énergie de liaison et la constante de Rydberg obtenues sans tenir compte du mouvement du noyau de l'atome d'hydrogène diffèrent-elles des grandeurs correspondantes précisées?

5.38. Calculer, pour l'hydrogène léger (H) et lourd (D), de combien diffèrent l'une de l'autre:

a) l'énergie de liaison de l'état fondamental;

b) la longueur d'onde de la raie de tête de la série de Lyman.

5.39. Calculer la distance des particules d'un système à l'état fondamental, l'énergie de liaison correspondante et la longueur d'onde de la raie de tête de la série de Lyman. Considérer les systèmes suivants:

a) un atome mésique d'hydrogène dont le noyau est le proton (dans l'atome mésique au lieu de l'électron tourne un méson ayant la même charge mais de masse 207 fois plus grande);

b) un positonium, système composé d'un électron et d'un positon évoluant autour d'un centre de masse commun.

Propriétés ondulatoires des particules

5.40. Calculer les longueurs d'onde de de Broglie pour un électron, un proton et un atome d'uranium possédant la même énergie cinétique égale à 100 eV.

5.41. Quelle énergie supplémentaire faut-il communiquer à un électron pour que sa longueur d'onde de de Broglie diminue de 100 à 50 pm?

5.42. Un neutron d'énergie cinétique $T = 25$ eV rencontre un deuton au repos (le noyau de l'hydrogène lourd). Déterminer les longueurs d'onde de de Broglie des deux particules dans le système de leur centre d'inertie.

5.43. Calculer la longueur d'onde de de Broglie la plus probable des molécules d'hydrogène se trouvant en équilibre thermodynamique à la température ambiante.

5.44. Obtenir l'expression de la longueur d'onde de de Broglie λ pour une particule relativiste animée d'une énergie cinétique T. Pour quelle valeur de T l'erreur de λ calculée d'après la formule non relativiste ne dépasse pas 1% pour l'électron et pour le proton?

5.45. Un flux parallèle d'électrons monoénergétiques attaque normalement un diaphragme à fente étroite rectangulaire de largeur $b = 0{,}10$ mm. Déterminer la vitesse de ces électrons sachant que sur un écran éloigné de la fente à la distance $l = 50$ cm la largeur du maximum central de diffraction est $\Delta x = 8{,}0$ µ.

5.46. Un flux parallèle d'électrons accélérés par une d.d.p. $V = 25$ V tombe sous l'incidence normale sur un diaphragme à deux fentes étroites dont la distance est $d = 50$ µ. Déterminer la distance des maxima voisins d'une figure de diffraction portée par un écran situé à la distance $l = 100$ cm des fentes.

5.47. Un pinceau étroit d'électrons monoénergétiques tombe sous un angle de glissement $\vartheta = 30°$ sur une face naturelle d'un monocristal d'aluminium. La distance des plans réticulaires parallèles à cette face du monocristal est $d = 0{,}20$ nm. Pour une certaine tension accélératrice V_0 on observe un maximum de la réflexion régulière. Déterminer V_0 en sachant que le maximum suivant de la réflexion

régulière apparaît lorsque la tension accélératrice augmente de $\eta = 2{,}25$ fois.

5.48. Un pinceau d'électrons monoénergétiques tombe normalement sur une face du monocristal de nickel. Dans la direction faisant un angle $\vartheta = 55°$ avec la normale à la face s'observe un maximum de la réflexion de quatrième ordre pour une énergie des électrons $T = 180$ eV. Calculer la valeur correspondante de la distance des plans réticulaires.

5.49. Un pinceau d'électrons d'énergie cinétique $T = 10$ keV en passant à travers une feuille d'aluminium polycristalline vient former, sur un écran, un système d'anneaux de diffraction. Déterminer la distance des plans réticulaires correspondant à la réflexion de troisième ordre par un système de plans réticulaires en sachant qu'elle se traduit par un anneau de diamètre $D = 3{,}20$ cm. La distance entre l'écran et la feuille $l = 10{,}0$ cm.

5.50. Une particule de masse m se trouve dans un puits de potentiel unidimensionnel rectangulaire aux parois infiniment hautes. La largeur du puits est l. Déterminer les valeurs admissibles de l'énergie de la particule sachant que seuls sont réalisables les états de mouvement pour lesquels la largeur du puits est multiple de la demi-longueur d'onde de de Broglie.

5.51. Interpréter les postulats quantiques de Bohr dans l'hypothèse ondulatoire: montrer que l'électron dans l'atome d'hydrogène ne peut décrire que les orbites circulaires, multiples de la longueur d'onde de de Broglie.

5.52. Evaluer les erreurs minimales sur les vitesses d'un électron, d'un proton et d'une bille de masse de 1 mg, les coordonnées des particules et du centre de la bille étant fixées avec une incertitude de 1 μ.

5.53. Montrer que pour une particule, dont l'indétermination sur la position est $\Delta x = \lambda/2\pi$ où λ est la longueur d'onde de de Broglie, l'indétermination sur la vitesse est une quantité de même ordre de grandeur que la vitesse elle-même de la particule.

5.54. Evaluer à l'aide de la relation d'incertitude l'énergie cinétique minimale d'un électron se déplaçant dans un domaine de dimension $l \sim 0{,}1$ nm.

5.55. Une particule de masse m se trouve dans un puits de potentiel rectangulaire aux parois infiniment hautes. La largeur du puits est l. Pour quelles valeurs d'énergie cinétique de la particule T l'indétermination relative $\Delta T/T$ sera-t-elle inférieure à 0,01?

5.56. Un électron se trouve dans un puits de potentiel unidimensionnel rectangulaire aux parois infiniment hautes. La largeur du puits est l. Evaluer à l'aide de la relation d'incertitude la force de pression qu'exerce l'électron sur les parois de ce puits, son énergie étant minimale possible.

5.57. Un électron libre est localisé, initialement, dans un domaine de dimension $l \approx 0{,}1$ nm. Evaluer à l'aide de la relation d'in-

certitude le temps τ au bout duquel la largeur du paquet d'onde qui lui correspond augmente de $\eta = 10^2$ fois.

5.58. Une particule de masse m se déplace dans un champ potentiel unidimensionnel $U = kx^2/2$ (oscillateur harmonique). Evaluer l'énergie minimale possible de la particule dans un tel champ en recourant à la relation d'incertitude.

5.59. Evaluer l'énergie minimale possible d'un électron dans l'atome d'hydrogène et sa distance efficace correspondante du noyau en s'aidant de la relation d'incertitude.

5.60. Un faisceau parallèle d'atomes d'hydrogène de vitesse $v = 1{,}2$ km/s tombe normalement sur un diaphragme à fente étroite derrière lequel à la distance $l = 1{,}0$ m de celui-ci est placé un écran. Evaluer, en recourant à la relation d'incertitude, la largeur de la fente δ telle que la largeur de son image sur l'écran soit minimale.

5.61. Déterminer la solution particulière de l'équation unidimensionnelle temporelle de Schrödinger pour une particule de masse m se déplaçant librement.

5.62. Une particule à l'état fondamental se trouve dans un puits de potentiel unidimensionnel rectangulaire, de largeur l, aux parois parfaitement impénétrables ($0 < x < l$). Déterminer la probabilité du séjour de cette particule dans le domaine $l/3 \leqslant x \leqslant 2l/3$.

5.63. Une particule de masse m se trouve dans un puits de potentiel unidimensionnel rectangulaire aux parois infiniment hautes. La largeur du puits est l. Déterminer les fonctions d'onde normées des états stationnaires de la particule en prenant pour origine des abscisses x le milieu du puits.

5.64. Démontrer que les fonctions d'onde des états stationnaires d'une particule se trouvant dans un puits de potentiel unidimensionnel aux parois infiniment hautes sont orthogonales, i.e. satisfont à la condition

$$\int_0^l \psi_n \psi_{n'}\, dx = 0 \quad \text{pour} \quad n' = n.$$

Ici l est la largeur du puits; n, les nombres entiers.

5.65. Un électron se trouve dans un puits de potentiel unidimensionnel rectangulaire aux parois infiniment hautes. La largeur l du puits est telle que les niveaux énergétiques sont disposés de manière très dense. Déterminer la densité de niveaux dN/dE, i.e. leur nombre par intervalle d'énergie unité, en fonction de E. Calculer dN/dE pour $E = 1{,}0$ eV si $l = 1{,}0$ cm.

5.66. Une particule de masse m se trouve dans un puits de potentiel bidimensionnel rectangulaire aux parois parfaitement impénétrables. Déterminer:

a) les valeurs virtuelles de l'énergie de la particule, les côtés du puits étant l_1 et l_2;

b) les valeurs de l'énergie de la particule pour les quatre premiers niveaux énergétiques, le puits étant un carré de côté l.

5.67. Une particule de masse m se trouve dans un champ potentiel unidimensionnel $U(x)$ dont la forme est représentée fig. 189, où $U(0) = \infty$.

1) Etablir l'équation permettant de déterminer les valeurs virtuelles de l'énergie de la particule dans le domaine $E < U_0$. Réduire cette équation à la forme:

$$\sin kl = \pm kl \sqrt{\hbar^2/2ml^2U_0}, \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar.$$

En résolvant graphiquement cette équation, montrer que les valeurs virtuelles de l'énergie de la particule forment un spectre discret.

2) Trouver la valeur minimale de la quantité l^2U_0 qui correspond à l'apparition du premier niveau énergétique dans le domaine $E < U_0$. Pour quelle valeur minimale de l^2U_0 apparaît le n-ème niveau énergétique?

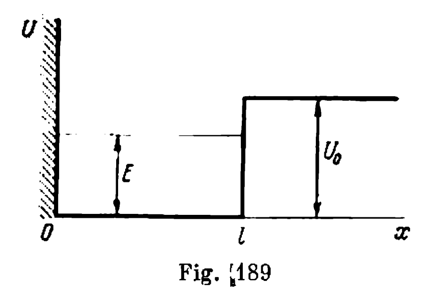


Fig. 189

3) Calculer la probabilité de ce que la particule d'énergie $E < U_0$ se trouve dans le domaine $x > l$ pour le cas où $l^2U_0 = (3\pi/4)^2\hbar^2/m$. Expliquer pourquoi la particule peut se trouver dans ce domaine (ici l'énergie totale de la particule est plus petite que celle potentielle!).

5.68. Calculer les valeurs virtuelles de l'énergie d'une particule se trouvant dans un puits de potentiel à symétrie sphérique

$$U(r) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad r < r_0, \\ \infty & \text{pour} \quad r = r_0 \end{cases}$$

dans le cas où son mouvement est décrit par une fonction d'onde $\psi(r)$ ne dépendant que de r.

Indication. En résolvant l'équation de Schrödinger, utiliser la substitution $\psi(r) = \chi(r)/r$.

5.69. La fonction d'onde d'une particule de masse m dans un champ potentiel unidimensionnel $U(x) = kx^2/2$, pour l'état fondamental, a la forme $\psi(x) = Ae^{-\alpha x^2}$, où A est un facteur de normalisation, α, une constante positive. Déterminer, à l'aide de l'équation de Schrödinger, α et l'énergie E de la particule dans cet état.

5.70. En recourant à l'équation de Schrödinger, déterminer l'énergie de l'électron de l'atome d'hydrogène en état stationnaire $\psi(r) = A(1 + ar)e^{-\alpha r}$ où A, a et α sont certaines constantes.

5.71. La fonction d'onde d'un électron en état fondamental d'un atome d'hydrogène a la forme $\psi(r) = Ae^{-r/r_1}$, où A est une certaine constante, r_1, le premier rayon de Bohr. Déterminer:

a) la distance la plus probable entre l'électron et le noyau;

b) la valeur moyenne du module de la force de Coulomb;
c) la valeur moyenne de l'énergie potentielle;
d) le potentiel électrostatique moyen créé par l'électron au centre de l'atome.

5.72. Des particules de masse m et d'énergie E attaquent, de gauche à droite, une barrière de potentiel (fig. 190). Déterminer:
a) le facteur de réflexion R de cette barrière pour $E > U_0$;
b) la profondeur efficace x_{eff} à laquelle pénètrent les particules dans le domaine $x > 0$ pour $E < U_0$ (x_{eff} est une distance entre la frontière de la barrière et le point où la densité de probabilité de trouver la particule diminue de e fois).

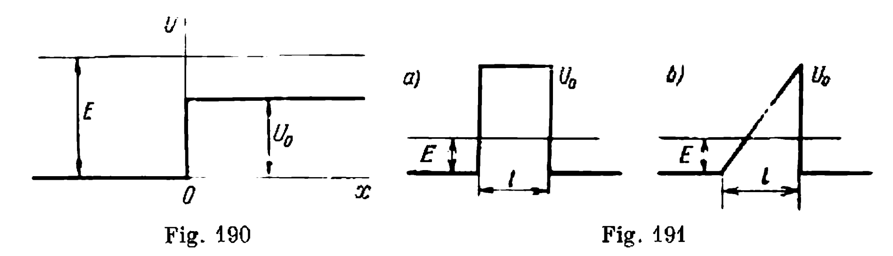


Fig. 190

Fig. 191

5.73. Trouver pour un électron d'énergie E la probabilité D de franchir la barrière de potentiel de largeur l et de hauteur U_0, la forme de la barrière étant:
a) celle de la fig. 191, a;
b) celle de la fig. 191, b.
Dans le calcul utiliser la formule

$$D \approx e^{-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U-E)}\,dx},$$

où x_1 et x_2 sont des points entre lesquels $U > E$.

Propriétés des atomes. Spectres

5.74. L'énergie de liaison de l'électron de valence d'un atome de lithium en états $2S$ et $2P$ est égale respectivement à 5,39 et à 3,54 eV. Calculer les corrections de Rydberg pour les termes S et P de cet atome.

5.75. Déterminer la correction de Rydberg pour le terme $3P$ de l'atome de sodium dont le premier potentiel d'excitation est égal à 2,10 V, l'énergie de liaison de l'électron de valence en état fondamental $3S$ étant 5,14 eV.

5.76. Déterminer l'énergie de liaison de l'électron de valence pour l'état fondamental de l'atome de lithium en sachant que la longueur d'onde de la raie de tête de la série nette $\lambda_1 = 813$ nm et celle de la frontière à ondes courtes de cette série $\lambda_2 = 350$ nm.

5.77. Déterminer les longueurs d'onde des raies spectrales dues

au passage des atomes de lithium excités de l'état $3S$ à l'état fondamental $2S$ sachant que les corrections de Rydberg pour les termes S et P sont respectivement égaux à —0,41 et à —0,04.

5.78. Le passage $3P \to 3S$ fait naître un doublet jaune d'une raie de résonance de sodium, dont les composantes ont pour longueurs d'ondes 589,00 et 589,56 nm. Déterminer en eV la valeur du dédoublement du terme $3P$.

5.79. Ecrire les symboles spectraux des termes d'un atome d'hydrogène dont l'électron se trouve en état avec le nombre quantique principal $n = 3$.

5.80. Combien de nombres quantiques J peut posséder un atome en un état avec les nombres quantiques S et L égaux respectivement à:

a) 2 et 3; b) 3 et 3; c) 5/2 et 2.

Quels sont ces nombres?

5.81. Déterminer les valeurs virtuelles des moments mécaniques totaux des atomes en états ^4P et ^5D.

5.82. Déterminer le moment mécanique total virtuel maximal et le symbole correspondant du terme de l'atome:

a) de sodium dont l'électron de valence a pour nombre quantique principal $n = 4$;

b) à configuration électronique $1s^2 2p3d$.

5.83. On sait qu'en états F et D le nombre de valeurs virtuelles du nombre quantique J est le même et égal à cinq. Déterminer le moment mécanique de spin de ces états.

5.84. La multiplicité de l'état d'un atome est égale à trois, le moment mécanique total étant $\hbar\sqrt{20}$. Quel serait alors le nombre quantique L correspondant?

5.85. Déterminer les multiplicités virtuelles $\varkappa$ des termes du type:

a) $^{\varkappa}D_2$; b) $^{\varkappa}P_{3/2}$; c) $^{\varkappa}F_1$.

5.86. En plus de couches complètes, un atome possède trois électrons (s, p et d) et son moment mécanique total est maximal possible pour cette configuration. Déterminer, dans le modèle vectoriel correspondant de l'atome, l'angle entre le moment de spin et le moment mécanique total de l'atome.

5.87. Un atome à l'état au nombre quantique de spin $S = 1$ possède un moment mécanique total $\hbar\sqrt{6}$. Dans le modèle vectoriel correspondant l'angle des moments de spin et mécanique est $\vartheta =$ $= 54,7°$. Ecrire le symbole spectral du terme de cet atome.

5.88. Ecrire les symboles spectraux des termes d'un système à deux électrons p et d.

5.89. Un système se compose d'un électron d et d'un atome à l'état $^2P_{3/2}$. En déterminer les termes spectraux virtuels. La liaison est normale.

5.90. Indiquer parmi les transitions ci-dessous celles interdites par les règles de sélection: $^2D_{3/2} \to {}^2P_{1/2}$, $^3P_1 \to {}^2S_{1/2}$, $^3F_3 \to {}^3P_2$, $^4F_{7/2} \to {}^5D_{5/2}$.

5.91. Déterminer la multiplicité résultante de dégénérescence de l'état $3D$ de l'atome de lithium. Quelle est le sens physique de cette grandeur?

5.92. Déterminer la multiplicité de dégénérescence des états ^2P, ^3D et ^4F aux moments mécaniques totaux maximaux possibles.

5.93. Ecrire le symbole spectral d'un terme dont la multiplicité de dégénérescence est égale à sept, les nombres quantiques L et S étant reliés par $L = 3S$.

5.94. Quel élément possède un atome dont les couches K, L, M et la sous-couche $4s$ sont complètes et la sous-couche $4p$ est demi-complète?

5.95. En se servant des règles de Hund déterminer le terme fondamental d'un atome dont la sous-couche non complète contient:

a) trois électrons p;

b) quatre électrons p.

5.96. Déterminer, à l'aide des règles de Hund, le moment mécanique total d'un atome en état fondamental, sa sous-couche non complète contenant:

a) trois électrons d;

b) sept électrons d.

5.97. Un atome a une sous-couche non complète. En utilisant les règles de Hund, déterminer le nombre de ses électrons sachant que ceux-ci sont:

a) les électrons d, le terme fondamental de l'atome étant $^3F_2$;

b) les électrons p, le terme fondamental de l'atome étant $^2P_{3/2}$.

5.98. Déterminer à l'aide des règles de Hund le moment magnétique de l'état fondamental d'un atome dont la sous-couche non complète contient cinq électrons équivalents, i.e. juste la moitié.

5.99. Déterminer le rapport du nombre d'atomes du sodium gazeux en état $3P$ au nombre d'atomes en état fondamental $3S$ à la température $T = 2400$ K si à la transition $3P \rightarrow 3S$ correspond la raie spectrale $\lambda = 589$ nm.

5.100. Déterminer la durée de vie moyenne τ des atomes de lithium atomique en état d'excitation de résonance si à la température $T = 1500$ K la puissance émissive d'une unité de volume pour la raie de résonance $\lambda = 671$ nm ($2P \rightarrow 2S$) est égale à $P = 0{,}30$ W/cm^3, la concentration des atomes étant $n = 3{,}6 \cdot 10^{16}$ cm^{-3}.

5.101. Calculer la durée de vie moyenne des atomes excités sachant que l'intensité de la raie spectral due à la transition à l'état fondamental diminue de $\eta = 25$ fois à la distance $l = 2{,}5$ mm le long du faisceau d'atomes dont la vitesse $v = 600$ m/s.

5.102. Calculer la longueur d'onde de la raie K_α du cuivre ($Z = 29$) sachant que la longueur d'onde de la raie K_α du fer ($Z = 26$) est égale à 193 pm.

5.103. Calculer à l'aide de la loi de Moseley:

a) la longueur d'onde de la raie K_α de l'aluminium et du cobalt;

b) la différence des énergies de liaison des électrons K et L du vanadium.

5.104. Combien d'éléments y a-t-il dans la série entre les éléments dont les raies K_α ont la longueur d'onde 250 et 179 pm?

5.105. Déterminer la tension appliquée au tube à rayons X avec anticathode en nickel, la différence des longueurs d'onde entre la raie K_α et la limite des ondes courtes du spectre continu des rayons X étant égale à 84 pm.

5.106. Un tube à rayons X avec anticathode en aluminium, soumis à une certaine tension, produit un spectre continu dont la longueur d'onde de la limite des ondes courtes est égale à 0,50 nm. Observera-t-on alors la série K du spectre caractéristique dont le potentiel d'excitation est 1,56 kV?

5.107. Lorsque la tension sur le tube à rayons X augmente de $U_1 = 10$ kV à $U_2 = 20$ kV, l'intervalle de longueurs d'onde entre la raie K_α et la limite des ondes courtes augmente de $n = 3{,}0$ fois. Déterminer le numéro atomique de l'élément dont est fait l'anticathode du tube.

5.108. Pour quel métal la différence des pulsations des limites K et L d'absorption des rayons X représente $\Delta\omega = 6{,}85 \cdot 10^{18}$ rd/s?

5.109. Calculer l'énergie de liaison de l'électron K du vanadium pour lequel la longueur d'onde de la limite L d'absorption est $\lambda_L =$ $= 2{,}4$ nm.

5.110. Déterminer l'énergie de liaison de l'électron L du titane, la différence entre la longueur d'onde de la raie de tête de la série K et celle de sa limite des ondes courtes constituant $\Delta\lambda = 26$ pm.

5.111. Déterminer l'énergie cinétique et la vitesse des photoélectrons que le rayonnement K_α du zinc arrache à la couche K des atomes de fer, la limite de la bande d'absorption K des ceux-ci étant $\lambda_K = 174$ pm.

5.112. Calculer en magnétons de Bohr le moment magnétique de l'atome:

a) en état ^1F;

b) en état $^2D_{3/2}$;

c) en état tel que $S = 1$, $L = 2$ et le facteur de Landé $g = 4/3$.

5.113. Déterminer le moment mécanique de spin de l'atome en état D_2 si la valeur maximale de la projection du moment magnétique à cet état est égale à quatre magnétons de Bohr.

5.114. L'atome en état aux nombres quantiques $L = 2$, $S = 1$ se trouve dans un champ magnétique. Trouver son moment magnétique sachant que l'angle minimal virtuel que fait le moment magnétique avec la direction du champ est égal à 30°.

5.115. Un électron de valence de l'atome de sodium se trouve en état au nombre quantique principal $n = 3$, son moment mécanique total étant maximal possible. Quel est son moment magnétique en cet état?

5.116. Un atome excité a une configuration électronique $1s^2 2s^2 2p 3d$ et possède alors le moment mécanique total maximal possible. Déterminer le moment magnétique de l'atome en cet état.

5.117. Déterminer le moment mécanique total de l'atome en état à $S = 3/2$ et $L = 2$ sachant que son moment magnétique est nul.

5.118. Un certain atome se trouve en état tel que $S = 2$, le moment mécanique total $M = \sqrt{2}\hbar$, le moment magnétique étant nul. Ecrire le symbole spectral du terme correspondant.

5.119. Un atome en état $^2P_{3/2}$ se trouve dans un champ magnétique extérieur d'induction $B = 1,0$ kG. En recourant au modèle vectoriel, déterminer la vitesse angulaire de la précession du moment mécanique total de cet atome.

5.120. Un atome d'hydrogène en état fondamental se trouve à la distance $r = 2,5$ cm d'un long fil conducteur traversé par un courant $i = 10$ A. Déterminer la force agissant sur l'atome.

5.121. Dans la méthode de Stern et de Gerlache, on fait passer un pinceau d'atomes de vanadium en état fondamental $^4F_{3/2}$ à travers un champ magnétique brusquement variable d'étendue $l_1 = 5,0$ cm. La décomposition du pinceau est observée sur un écran situé à $l_2 = 15$ cm de l'aimant. Pour quelle valeur du gradient d'induction B du champ magnétique la distance entre les composantes extrêmes du pinceau décomposé sera, sur l'écran, $\delta = 2,0$ mm, l'énergie cinétique les atomes étant $T = 22$ meV?

5.122. En combien de sous-niveaux se décompose dans un faible champ magnétique un terme:

a) $^3P_0$; b) $^2F_{5/2}$; c) $^4D_{1/2}$?

5.123. Un atome se trouve dans un champ magnétique d'induction $B = 2,50$ kG. Déterminer la valeur complète de la décomposition (en eV) des termes:

a) ^1D; b) $^3F_4$.

5.124. On sait que la raie spectrale $\lambda = 612$ nm est due à la transition entre les termes singulets. Déterminer l'intervalle $\Delta\lambda$ entre les composantes extrêmes de cette raie dans un champ magnétique de $B = 10,0$ kG.

5.125. Déterminer la valeur minimale de l'induction B du champ magnétique telle qu'on puisse distinguer les composantes de la raie spectrale $\lambda = 536$ nm, due à la transition entre les singulets, à l'aide d'un appareil spectral à pouvoir de résolution $\lambda/\delta\lambda = 1,0 \cdot 10^5$. L'observation s'effectue dans la direction perpendiculaire au champ magnétique.

5.126. Une raie spectrale de la transition $^3D_1 \to {}^3P_0$ subit une décomposition Zeeman dans un champ magnétique faible. L'intervalle entre les composantes voisines de la décomposition Zeeman $\delta\tilde{\nu} = 0,070$ cm^{-1} dans le cas où l'observation s'effectue dans la direction perpendiculaire au champ magnétique. Déterminer l'induction du champ au point de l'emplacement de la source.

5.127. Les longueurs d'onde d'un doublet de la raie jaune de sodium ($^2P \to {}^2S$) sont 589,59 et 589,00 nm. Trouver:

a) le rapport des intervalles entre les sous-niveaux voisins de la décomposition Zeeman des termes $^2P_{3/2}$ et $^2P_{1/2}$ dans un champ magnétique faible;

b) l'induction B du champ magnétique telle que l'intervalle entre deux sous-niveaux voisins de la décomposition Zeeman du terme $^2P_{3/2}$ soit $\eta = 50$ fois inférieur à la décomposition naturelle du terme ^2P.

5.128. Donner un schéma des transitions possibles entre les termes $^2P_{3/2}$ et $^2S_{1/2}$ dans un champ magnétique faible. Calculer pour un champ magnétique de $B = 4,5$ kG les déplacements (en rd/s) des composantes Zeeman de cette raie.

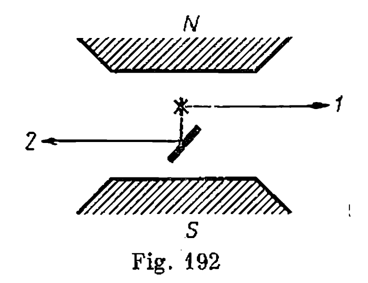


Fig. 192

5.129. Une même raie spectrale subissant une décomposition Zeeman anomale est observée dans la direction *1* ainsi que dans la direction *2* après la réflexion par un miroir (fig. 192). Combien de composantes Zeeman observe-t-on dans les deux directions, la raie spectrale étant due à la transition:

a) $^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$; b) $^3P_2 \rightarrow {}^3S_1$?

5.130. Déterminer la valeur complète de la décomposition $\Delta\omega$ de la raie spectrale $^3D_3 \rightarrow {}^3P_2$ dans un faible champ magnétique d'induction $B = 3,4$ kG.

Molécules et cristaux

5.131. Déterminer la vitesse angulaire de rotation d'une molécule S_2 se trouvant au premier niveau de rotation excité, la distance de ses noyaux étant $d = 189$ pm.

5.132. Trouver, pour la molécule HCl, les nombres quantiques de rotation des deux niveaux voisins dont la différence des énergies est 7,86 meV. La distance des noyaux de la molécule est 127,5 pm.

5.133. Déterminer le moment mécanique de la molécule d'oxygène dont l'énergie cinétique de rotation est $E = 2,16$ meV, la distance des noyaux étant $d = 121$ pm.

5.134. Montrer que les intervalles de pulsations entre deux raies spectrales voisines du spectre de rotation pure d'une molécule diatomique ont même valeur. Déterminer le moment d'inertie et la distance des noyaux d'une molécule CH en sachant que les intervalles entre deux raies consécutives d'un spectre de rotation pure pour de telles molécules est $\Delta\omega = 5,47 \cdot 10^{12}$ rd/s.

5.135. Calculer, pour la molécule HF, le nombre de niveaux de rotation situés entre les niveaux de vibration zéro et premier excité. La pulsation propre des vibrations de cette molécule est égale à $7,79 \cdot 10^{14}$ rd/s, la distance des noyaux 91,7 pm.

5.136. Trouver pour une molécule diatomique dN/dE (nombre de niveaux de rotation par intervalle unité d'énergie) en fonction de l'énergie de rotation E. Calculer cette grandeur pour une molécule d'iode au nombre quantique de rotation $J = 10$. La distance des noyaux de cette molécule est de 267 pm.

5.137. Déterminer le rapport des énergies nécessaires pour exciter le premier niveau de vibration et le second niveau de rotation d'une molécule diatomique. Calculer ce rapport pour les molécules suivantes :

Molécule	ω, 10^{14} rd/s	d, pm
a) H_2	8,3	74
b) HI	4,35	160
c) I_2	0,40	267

Ici ω est la pulsation propre des vibrations, d, la distance des noyaux.

5.138. La pulsation propre des vibrations d'une molécule d'hydrogène est égale à $8{,}25 \cdot 10^{14}$ rd/s, la distance des noyaux 74 pm. Déterminer le rapport du nombre de ces molécules se trouvant au premier niveau de vibration excité ($v = 1$) au nombre de molécules situées au premier niveau de rotation excité ($J = 1$) à la température $T = 875$ K. On rappelle que la multiplicité de dégénérescence des niveaux de rotation est égale à $2J + 1$.

5.139. L'énergie moyenne d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω, à la température T, est égale à

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)} .$$

Déduire cette formule en utilisant la distribution de Boltzmann. Obtenir à l'aide de cette formule l'expression de la capacité calorifique molaire de vibration $C_{V\,\text{vibr}}$ d'un gaz diatomique (à volume constant). Calculer $C_{V\,\text{vibr}}$ pour un gaz constitué des molécules Cl_2 à la température $T = 300$ K. La pulsation propre des vibrations de ces molécules a pour valeur $5{,}63 \cdot 10^{14}$ rd/s.

5.140. Au milieu d'une bande de rotation-vibration du spectre d'émission de molécules HCl, là où manque la raie « zéro » interdite par la règle de sélection, l'intervalle entre les raies voisines est $\Delta\tilde{\nu} = 42$ cm^{-1}. Calculer la distance des noyaux de la molécule HCl.

5.141. Calculer les longueurs d'onde des satellites rouge et violet les plus voisins de la raie non déplacée dans un spectre de la diffusion combinatoire des molécules F_2 si la longueur d'onde de la lumière incidente est $\lambda_0 = 404{,}7$ nm et la pulsation propre des vibrations de la molécule $\omega = 2{,}15 \cdot 10^{14}$ rd/s.

5.142. Calculer la pulsation propre des vibrations et le coefficient de la force quasi élastique de la molécule S_2 sachant que les longueurs d'onde des satellites rouge et violet les plus voisins de la raie non déplacée d'un spectre combinatoire sont égales à 346,6 et 330,0 nm.

5.143. Déterminer le rapport des intensités des satellites violet et rouge les plus voisins de la raie non déplacée du spectre vibratoire de Raman des molécules Cl_2 à la température $T = 300$ K, la pulsation propre des vibrations de ces molécules étant $\omega_0 = 1{,}06 \cdot 10^{14}$ rd/s. Une fois la température doublée, comment varie le rapport des intensités?

5.144. Etudier les types de vibrations virtuels des molécules linéaires suivantes :

a) CO_2 (O — C — O) ; b) C_2H_2 (H — C — C — H).

5.145. Déterminer le nombre de vibrations transversales propres d'une corde de longueur l dans l'intervalle de pulsations compris entre ω et $\omega + d\omega$, la célérité de la propagation des vibrations étant v. On admet que les vibrations s'effectuent dans un plan.

5.146. Déterminer le nombre de vibrations transversales propres d'une membrane rectangulaire d'aire S dans l'intervalle de pulsations compris entre ω et $\omega+d\omega$, la célérité de la propagation des vibrations étant v.

5.147. Déterminer le nombre de vibrations transversales propres d'un parallélépipède rectangle de volume V dans l'intervalle de pulsations compris entre ω et $\omega + d\omega$, la célérité de la propagation des vibrations étant v.

5.148. En admettant que les célérités de la propagation des vibrations longitudinales et transversales ont la même valeur v, déterminer la température caractéristique de Debye :

a) pour un cristal unidimensionnel : une chaîne d'atomes identiques contenant n_0 atomes par unité de longueur (cas unidimensionnel) ;

b) pour un réseau plan carré composé d'atomes identiques contenant n_0 atomes par unité de surface ;

c) pour un réseau cubique simple composé d'atomes identiques comportant n_0 atomes par unité de volume.

5.149. Déterminer la température caractéristique de Debye pour le fer dans lequel les vibrations longitudinales et transversales se propagent aux vitesses respectives de 5,85 et 3,23 km/s.

5.150. Evaluer la célérité de la propagation des vibrations acoustiques dans l'aluminium dont la température caractéristique de Debye est $\Theta = 396$ K.

5.151. Obtenir l'expression donnant la capacité calorifique molaire d'une chaîne d'atomes identiques en fonction de température T, la température caractéristique de Debye de la chaîne étant Θ. Simplifier l'expression obtenue pour le cas où $T \gg \Theta$.

5.152. La pulsation des vibrations ω pour une chaîne d'atomes identiques dépend du nombre d'onde k comme $\omega = \omega_m \sin (ka/2)$ où ω_m est la pulsation des vibrations maximale, $k = 2\pi/\lambda$, le nombre d'onde correspondant à la pulsation ω, a, la distance entre les atomes voisins. En utilisant cette relation de dispersion, déterminer, en fonction de ω, le nombre de vibrations longitudinales par intervalle de pulsations unité, i.e. $dN/d\omega$, si la longueur de la chaîne est l. Etant donné $dN/d\omega$, déterminer le nombre total N de vibrations longitudinales virtuelles.

5.153. Calculer l'énergie des vibrations zéro d'un gramme de cuivre dont la température caractéristique de Debye est $\Theta = 330$ K.

5.154. La fig. 193 représente le graphique de la capacité calorifique d'un cristal en fonction de la température (d'après Debye).

Ici C_{cl} est la capacité calorifique classique, Θ, la température caractéristique de Debye. Déterminer à partir de ce graphique:

a) la température caractéristique de Debye pour l'argent dont la capacité calorifique molaire est 15 J/(mole·K) à $T = 65$ K;

b) la capacité calorifique molaire de l'aluminium à $T = 80$ K sachant qu'à $T = 275$ K elle est égale à 22,4 J/(mole·K);

c) la pulsation des vibrations maximale du cuivre dont la capacité calorifique à $T = 125$ K diffère de 25 % de celle classique.

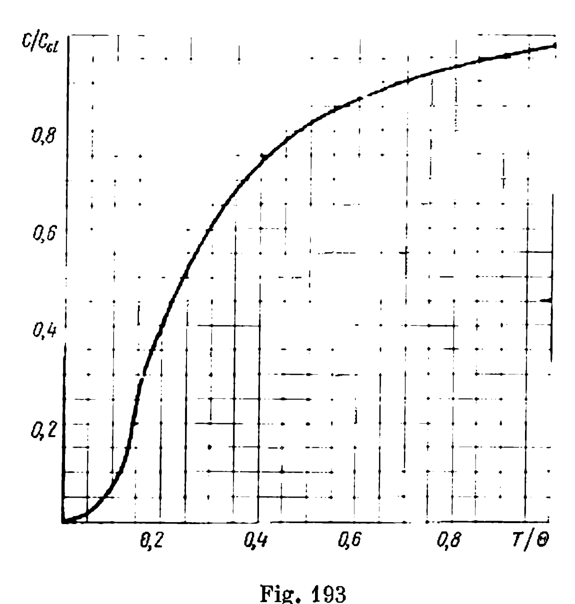


Fig. 193

5.155. Montrer que la capacité calorifique molaire d'un cristal à la température $T \ll \Theta$, où Θ est la température caractéristique de Debye, est donnée par la formule $C = (12\pi^4/5)R(T/\Theta)^3$.

Indication. On tient compte de ce que

$$\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

5.156. Peut-on admettre que les températures 20 et 30 K sont basses pour le fer sachant qu'à ces températures la capacité calorifique du fer est égale à 0,226 et à 0,760 J/(mole·K)?

5.157. Calculer la valeur moyenne de l'énergie des vibrations zéro par un oscillateur du cristal dans le modèle de Debye, la température caractéristique de Debye étant égale à Θ.

5.158. Représenter le spectre de la distribution de l'énergie des vibrations d'un cristal par pulsations (sans tenir compte des vibrations zéro). Etudier deux cas: $T = \Theta/2$ et $T = \Theta/4$ où Θ est la température caractéristique de Debye.

5.159. Evaluer les valeurs maximales de l'énergie et de l'impulsion du phonon (quantum acoustique) dans le cuivre dont la température caractéristique de Debye est égale à 330 K.

5.160. La distribution de Fermi pour les électrons libres dans le métal à $T = 0$ est donnée par:

$$dn_E = \frac{\sqrt{2m^3}}{\omega^2 \hbar^3} \sqrt{E}\, dE,$$

où dn_E est le nombre d'électrons ayant les énergies E, $E + dE$, par unité de volume, m, la masse d'un électron, $\hbar$, la constante de Planck. L'énergie E est comptée depuis le fond de la bande de conduction. En se servant de cette formule, trouver:

a) l'énergie cinétique maximale des électrons libres dans un métal où leur concentration est égale à n;

b) l'énergie cinétique moyenne des électrons libres étant donnée leur énergie cinétique maximale T_{max}.

5.161. Déterminer le nombre d'électrons libres par atome de sodium à $T = 0$, le niveau de Fermi étant $E_F = 3{,}07$eV et la densité de sodium 0,97 g/cm³.

5.162. A quelle température faudrait-il porter un gaz électronique classique pour que l'énergie moyenne de ses électrons soit égale à l'énergie moyenne des électrons libres dans le cuivre à $T = 0$? On admet qu'il y a un électron libre par atome de cuivre.

5.163. En se servant de la formule du problème 5.160, déterminer à $T = 0$:

a) la répartition des électrons libres par vitesses;

b) le rapport de la vitesse moyenne des électrons libres à leur vitesse maximale.

5.164. En partant de la formule du problème 5.160, déterminer la fonction de répartition des électrons libres dans un métal à $T = 0$ par longueurs d'onde de de Broglie.

5.165. Calculer la pression du gaz électronique dans le sodium métallique à $T = 0$, la concentration des électrons libres y étant $n = 2{,}5 \cdot 10^{22}$ cm^{-3}. Se servir de l'équation pour la pression d'un gaz parfait.

Radioactivité

5.166. Etant donné la constante de désintégration λ d'un noyau, déterminer:

a) la probabilité de ce qu'il se désintègre dans l'intervalle de temps de 0 à t;

b) sa durée de vie moyenne τ.

5.167. Quelle portion de noyaux radioactifs du cobalt, dont la période est 71,3 jours, se désintègre au bout d'un mois?

5.168. Combien de particules β émet l'isotope ^{24}Na de masse 1,0 μg au bout d'une heure? Sa période est 15 h.

5.169. Dans une expérience sur la désintégration β du radio-isotope ^{23}Mg le compteur est mis en marche au moment $t = 0$. Au

bout de $t_1 = 2{,}0$ s il enregistre N_1 particules β et au bout de $t_2 = 3t_1$, 2,66 fois plus. Déterminer la durée de vie moyenne des noyaux donnés.

5.170. L'activité d'une certaine substance diminue de 2,5 fois au bout de 7,0 jours. En déterminer la période.

5.171. A l'instant zéro l'activité d'un certain radio-isotope était 650 particules/mn. Quelle sera son activité au bout d'un temps égal à la moitié de sa période?

5.172. Déterminer la constante de désintégration et la durée de vie moyenne d'un radio-isotope ^{55}Co sachant que son activité diminue de 4,0 % par heure? Le produit de fission est non radioactif.

5.173. Une préparation ^{238}U de masse 1,0 g émet $1{,}24 \cdot 10^4$ particules α par seconde. Période de cet isotope et activité de la préparation?

5.174. Déterminer l'âge des anciennes pièces de bois sachant que l'activité spécifique de leur isotope ^{14}C constitue 3/5 de l'activité spécifique de cet isotope dans un arbre fraichement coupé. La période des noyaux de ^{14}C est égale à 5570 ans.

5.175. Dans un minerai d'uranium le rapport du nombre de noyaux de ^{238}U au nombre de noyaux de ^{206}Pb est $\eta = 2{,}8$. Evaluer l'âge du minerai en admettant que tout le plomb ^{206}Pb représente le descendant final de la chaîne de transformations radioactives d'uranium. La période de ^{238}U est égale à $4{,}5 \cdot 10^9$ ans.

5.176. Calculer les activités spécifiques des isotopes ^{24}Na et ^{235}U dont les périodes sont respectivement 15 h et $7{,}1 \cdot 10^8$ ans.

5.177. L'activité spécifique d'une préparation constituée du cobalt actif ^{58}Co et non actif ^{59}Co, est égale à $2{,}2 \cdot 10^{12}$ désint./(s·g). La période de ^{58}Co est égale à 71,3 jours. Déterminer le rapport de la masse du cobalt actif à la masse totale de la préparation (en %).

5.178. Un radio-isotope ^{32}P de période $T = 14{,}3$ jours se forme dans un réacteur nucléaire à la vitesse constante $q = 2{,}7 \cdot 10^9$ noyaux/s. Dans quel espace de temps à partir du début de la formation de ce radio-isotope son activité deviendra-t-elle $A = 1{,}0 \cdot 10^9$ désintégrations/s?

5.179. Un radio-isotope A_1 de constante de désintégration λ_1 se transforme en radio-isotope A_2 de constante de désintégration λ_2. En admettant qu'à l'instant initial la préparation ne contenait que les noyaux de l'isotope A_1, déterminer:

a) l'accumulation du radio-isotope A_2 en fonction du temps;

b) l'intervalle de temps au bout duquel d'activité du radio-isotope A_2 atteint son maximum.

5.180. Un radio-isotope A_1 subit une chaîne de transformations $A_1 \to A_2 \to A_3$ (stable), de constantes de désintégration respectives λ_1 et λ_2. En admettant qu'à l'instant initial la préparation ne contenait que les noyaux de l'isotope A_1 en quantité N_{10}, établir la loi de l'accumulation de l'isotope stable A_3.

5.181. L'isotope radioactif ^{210}Bi subit des transformations suivant la chaîne

$$^{210}\text{Bi} \xrightarrow[\lambda_1]{} {}^{210}\text{Po} \xrightarrow[\lambda_2]{} {}^{206}\text{Pb (stable)},$$

où les constantes de désintégration $\lambda_1 = 1{,}60 \cdot 10^{-6}$ s^{-1} et $\lambda_2 = 5{,}80 \cdot 10^{-8}$ s^{-1}. Calculer les activités α et β de la préparation de ^{210}Bi de masse 1,00 mg un mois après sa fabrication.

5.182. 1) Quel isotope se forme-t-il à partir d'un ^{226}Ra à radioactivité α à la suite de cinq désintégrations α et quatre désintégrations β?

2) Combien de désintégrations α et β subit ^{238}U en se transformant finalement en isotope stable ^{206}Pb?

5.183. Un noyau de ^{200}Po, initialement au repos, émet une particule α d'énergie cinétique $T_\alpha = 5{,}77$ MeV. Trouver la vitesse de recul du noyau fils. Quelle fraction de l'énergie totale libérée dans ce processus constitue l'énergie de recul du noyau fils?

5.184. Déterminer la quantité de chaleur dégagée par 1 mg de préparation ^{210}Po au bout du temps égal à la durée de vie moyenne de ces noyaux en sachant que les particules α émises ont l'énergie cinétique 5,3 MeV et que pratiquement tous les noyaux fils naissent directement en état fondamental.

5.185. La fission α des noyaux de ^{210}Po (à partir de l'état fondamental) s'accompagne de l'émission des deux groupes de particules α d'énergies cinétiques 5,30 et 4,50 MeV. A la suite de l'émission de ces particules α les noyaux fils se trouvent respectivement en états fondamental et excité. Déterminer l'énergie des quanta γ émis par les noyaux excités.

5.186. Le parcours moyen d'une particule α dans l'air sous conditions normales est donné par la formule $R = 0{,}98 \cdot 10^{-27} v_0^3$ cm où v_0 est la vitesse initiale de la particule α en cm/s. En se servant de cette formule, déterminer pour une particule α d'énergie cinétique initiale 7,0 Mev:

a) son parcours moyen;

b) le nombre moyen de paires d'ions que produit la particule donnée sur tout le chemin R ainsi que sur la première moitié de celui-ci en admettant que l'énergie de la formation d'une paire d'ions est égale à 34 eV.

5.187. Déterminer l'énergie Q libérée au cours des désintégrations β^- et β^+ et au cours de la capture K sachant les masses de l'atome père M_p, de l'atome fils M_f et de l'électron m.

5.188. En partant des valeurs des masses atomiques relevées aux tables, déterminer l'énergie cinétique maximale des particules β émises par les noyaux ^{10}Be et l'énergie cinétique de recul correspondante des noyaux fils naissant directement en état fondamental.

5.189. Evaluer la quantité de chaleur dégagée au bout de 24 heures dans un calorimètre par une préparation ^{24}Na de masse $m = 1{,}0$ mg à radioactivité β^-. On admet que les particules β ont, en

moyenne, une énergie cinétique égale à 1/3 de celle maximale possible pour la fission envisagée. La période de ^{24}Na est $T = 15$ h.

5.190. En utilisant les valeurs des masses des atomes données par les tables, calculer les énergies cinétiques du positon et du neutrino émis par le noyau ^{11}C dans le cas où le noyau fils ne recule pas.

5.191. Calculer l'énergie cinétique du recul du noyau dans une fission de positon d'un noyau ^{13}N dans le cas où l'énergie du positon est maximale.

5.192. En prenant dans les tables les valeurs des masses atomiques, déterminer la vitesse du noyau naissant au cours de la capture K par l'atome de ^{7}Be, le noyau fils étant alors immédiatement en état fondamental.

5.193. Au cours de la transition à l'état fondamental les noyaux excités ^{109}Ag émettent soit les rayons γ d'énergie 87 keV, soit les électrons K de conversion (leur énergie de liaison est 26 keV). Déterminer la vitesse de ces électrons.

5.194. Un noyau libre initialement au repos de ^{191}Ir d'énergie d'excitation $E = 129$ keV émet un quantum γ en passant à l'état fondamental. Calculer la variation relative d'énergie du quantum γ occasionnée par le recul du noyau.

5.195. Avec quelle vitesse relative doivent s'approcher l'un de l'autre la source et l'absorbeur constitués des noyaux libres de ^{191}Ir pour qu'on observe l'absorption maximale des rayons γ d'énergie $\varepsilon = 129$ keV?

5.196. Une source des quanta γ est située à $h = 20$ m au-dessus de l'absorbeur. Avec quelle vitesse faut-il déplacer la source vers le haut pour compenser complètement au point où se trouve l'absorbeur la variation d'énergie des quanta γ occasionnée par le champ de pesanteur terrestre?

5.197. A quelle hauteur minimale faut-il soulever une source des rayons γ comportant les noyaux excités de ^{67}Zn pour que l'enregistrement au sol révèle un déplacement gravitationnel de la raie de Mössbauer supérieur à la largeur de cette raie? On sait que les quanta γ enregistrés possèdent une énergie $\varepsilon = 93$ keV et apparaissent lors de la transition des noyaux de ^{67}Zn à l'état fondamental et que la durée de vie moyenne de l'état excité est $\tau = 14$ µs.

Réactions nucléaires

5.198. Une particule α d'énergie cinétique $T_\alpha = 7,0$ MeV subit une diffusion élastique sur un noyau de ^{6}Li, initialement au repos. Déterminer l'énergie cinétique du noyau de recul si l'angle entre les directions de diffusion des deux particules est $\theta = 60°$.

5.199. Un neutron a subi un choc élastique contre un deuton initialement au repos. Trouver la fraction de l'énergie perdue par neutron :

a) par choc direct ;

b) par diffusion sous l'angle droit.

5.200. Déterminer la valeur de l'angle maximal possible sous lequel est diffusé un deuton lors d'un choc élastique contre un proton initialement au repos.

5.201. En admettant le rayon d'un noyau $R = 0{,}13\sqrt[3]{A}$ pm où A est son nombre de masse, évaluer la densité nucléaire ainsi que le nombre de nucléons par unité de volume de noyau.

5.202. Ecrire les notations manquantes (x) dans les réactions nucléaires suivantes:

a) ^{10}B (x, α) ^{8}Be; b) ^{16}O (d, n) x;
c) ^{23}Na (p, x) ^{20}Ne; d) x (p, n) ^{37}Ar.

5.203. Montrer que l'énergie de liaison d'un noyau de nombre de masse A et de charge Z peut se définir par la formule

$$E_l = Z\Delta_{\mathrm{H}} + (A - Z)\,\Delta_n - \Delta,$$

où Δ_{H}, Δ_n et Δ sont les défauts de masse de l'atome d'hydrogène, du neutron et de l'atome correspondant au noyau donné.

5.204. Déterminer l'énergie de liaison d'un noyau ayant un même nombre de protons et de neutrons et dont le rayon est une fois et demie plus petit que celui du noyau de ^{27}Al.

5.205. En prenant dans les tables les valeurs des masses atomiques, calculer:

a) l'énergie moyenne de liaison par nucléon dans le noyau de ^{16}O;

b) l'énergie de liaison du neutron et de la particule α dans le noyau de ^{11}B;

c) l'énergie nécessaire pour décomposer le noyau de ^{16}O en quatre particules identiques.

5.206. Déterminer la différence des énergies de liaison du proton et du neutron dans le noyau de ^{11}B. Expliquer la cause de leur différence.

5.207. Calculer l'énergie nécessaire pour décomposer le noyau de ^{20}Ne en deux particules α et un noyau de ^{12}C en sachant que les énergies de liaison par nucléon dans les noyaux de ^{20}Ne, de ^{4}He et de ^{12}C sont respectivement 8,03; 7,07 et 7,68 MeV.

5.208. Calculer la masse (en u.a.m.):

a) d'un atome de ^{8}Li dont l'énergie de liaison du noyau est égale à 41,3 MeV;

b) du noyau de ^{10}C dont l'énergie de liaison par nucléon est égale à 6,04 MeV.

5.209. Etant données les énergies de liaison E_1, E_2, E_3 et E_4 des noyaux participant à la réaction $A_1 + A_2 \to A_3 + A_4$, calculer l'énergie de la réaction.

5.210. En admettant qu'un événement de fission du noyau de ^{235}U libère une énergie de 200 MeV calculer:

a) l'énergie dégagée lors de la combustion d'un kilogramme d'isotope ^{235}U et la masse du charbon à pouvoir calorifique 30 kJ/g, équivalent thermique d'un kilogramme de ^{235}U;

b) la masse de l'isotope ^{235}U ayant subi la fission au cours de l'explosion d'une bombe atomique équivalente à 30 kt de trotyle, l'équivalent thermique de celui-ci étant de 4,1 kJ/g.

5.211. Quelle est la quantité de chaleur qui se dégage lors de la formation d'un gramme de ^{4}He à partir du deutérium ^{2}H ? Quelle masse de charbon à pouvoir calorifique 30 kJ/g est équivalente à la quantité obtenue?

5.212. Calculer à l'aide des masses atomiques prises dans les tables l'énergie qui se dégage par nucléon lors d'une réaction thermonucléaire $^{6}Li + {}^{2}H \rightarrow 2\,{}^{4}He$. Comparer la valeur obtenue avec l'énergie libérée par nucléon au cours de la fission du noyau de ^{235}U.

5.213. Calculer l'énergie de la réaction $^{7}Li + p \rightarrow 2\,{}^{4}He$ sachant que l'énergie de liaison par nucléon dans les noyaux de ^{7}Li et de ^{4}He est respectivement 5,60 et 7,06 MeV.

5.214. Calculer l'énergie de la réaction $^{14}N\,(\alpha, p)^{17}O$ étant donné que l'énergie cinétique des particules α incidentes est $T_\alpha = 4{,}0$ MeV et l'énergie cinétique du proton projété sous un angle $\vartheta = 60°$ par rapport à la direction du mouvement de la particule est $T_p = 2{,}09$ MeV.

5.215. Déterminer à l'aide des masses atomiques tirées des tables, les énergies des réactions suivantes:

a) $^{7}Li(p, n)^{7}Be$; b) $^{9}Be\,(n, \gamma)^{10}Be$;
c) $^{7}Li(\alpha, n)^{10}B$; d) $^{16}O\,(d, \alpha)^{14}N$.

5.216. Déterminer à l'aide des masses atomiques tirées des tables les vitesses des produits de la réaction $^{10}B(n, \alpha)^{7}Li$ résultant de l'interaction entre les neutrons extrêmement lents et les noyaux du bore au repos.

5.217. Des protons attaquant une cible immobile de lithium provoquent la réaction $^{7}Li(p, n)^{7}Be$. Pour quelle valeur de l'énergie cinétique du proton le neutron naissant sera-t-il au repos?

5.218. Une particule α d'énergie cinétique $T = 5{,}3$ MeV provoque la réaction nucléaire $^{9}Be(\alpha, n)^{12}C$ dont l'énergie est $Q = +5{,}7$ MeV. Trouver l'énergie cinétique du neutron issu sous un angle droit à la direction de la particule.

5.219. Les protons d'énergie cinétique $T = 1{,}0$ MeV bombardant une cible à lithium provoquent la réaction nucléaire $p + {}^{7}Li \rightarrow 2\,{}^{4}He$. Déterminer l'énergie cinétique de chaque particule α et l'angle entre les directions de leurs projections si les particules sont diffusées symétriquement par rapport à la direction des protons incidents.

5.220. Une particule de masse m attaque un noyau de masse M au repos en amorçant une réaction endothermique. Montrer que l'énergie cinétique de seuil (minimal), rendant possible cette réaction, est donnée par la formule

$$T_{\text{seuil}} = \frac{m+M}{M}\,|Q|,$$

où Q est l'énergie de la réaction.

5.221. Quelle énergie cinétique faut-il communiquer au proton pour qu'il puisse provoquer la fission du noyau immobile d'hydrogène lourd ^2H dont l'énergie de liaison est $E = 2{,}2$ MeV?

5.222. En exposant à l'irradiation par un faisceau de protons monoénergétiques les cibles de lithium et de béryllium, on a trouvé que la réaction $^7Li(p, n)^7Be - 1{,}65$ MeV se déroulait tandis que la réaction $^9Be(p, n)^9B - 1{,}85$ MeV n'avait pas lieu. Déterminer les valeurs virtuelles de l'énergie cinétique des protons.

5.223. Pour amorcer la réaction (n, α) sur les noyaux immobiles de ^{11}B, l'énergie cinétique de seuil des neutrons doit être $T_{seuil} = 4{,}0$ MeV. Déterminer l'énergie de cette réaction.

5.224. Calculer les énergies cinétiques de seuil des protons nécessaires pour amorcer les réactions (p, n) et (p, d) sur les noyaux de ^7Li.

5.225. Déterminer à l'aide des valeurs des masses atomiques tirées des tables l'énergie cinétique de seuil d'une particule α pour la réaction nucléaire $^7Li(\alpha, n)^{10}B$. Quelle sera alors la vitesse du noyau de ^{10}B?

5.226. Un neutron d'énergie cinétique $T = 10$ MeV amorce une réaction nucléaire $^{12}C(n, \alpha)^9Be$ dont l'énergie de seuil est $T_{seuil} = 6{,}17$ MeV. Déterminer l'énergie cinétique des particules α issues sous un angle droit aux neutrons incidents.

5.227. De combien de p.cent l'énergie de seuil d'un quantum γ dépasse-t-elle l'énergie de liaison du deuton ($E_l = 2{,}2$ MeV) dans la réaction $\gamma + {}^2H \rightarrow n + p$?

5.288. Un proton d'énergie cinétique $T = 1{,}5$ MeV est capturé par un noyau de ^2H. Déterminer l'énergie d'excitation du noyau formé.

5.229. Le rendement de la réaction nucléaire $^{13}C(d, n)^{14}N$ a des maxima pour les valeurs suivantes de l'énergie cinétique T_i des deutons incidents: 0,60; 0,90; 1,55 et 1,80 MeV. Déterminer à l'aide des valeurs des masses atomiques tirées des tables les niveaux énergétiques correspondants du noyau compound par lesquels passe cette réaction.

5.230. Un pinceau de neutrons thermiques s'affaiblit de $\eta = 360$ fois après avoir traversé une lame de cadmium d'épaisseur $d = 0{,}50$ mm. Déterminer la section efficace d'interaction entre ces neutrons et les noyaux du cadmium.

5.231. Déterminer de combien de fois diminue l'intensité d'un pinceau étroit de neutrons thermiques après avoir traversé une couche d'eau lourde d'épaisseur $d = 5{,}0$ cm. Les sections efficaces d'interaction entre les noyaux de deutérium et d'oxygène pour les neutrons thermiques sont respectivement égales à $\sigma_1 = 7{,}0$ barn à $\sigma_2 = 4{,}2$ barn.

5.232. Un pinceau étroit de neutrons thermiques traverse une lame de fer pour lequel les sections efficaces d'absorption et de diffusion sont respectivement $\sigma_a = 2{,}5$ barn et $\sigma_d = 11$ barn. Déterminer la partie relative de neutrons quittant le faisceau à la suite de la diffusion, l'épaisseur de la lame étant $d = 0{,}50$ cm.

5.233. Le rendement de la réaction nucléaire avec formation des isotopes radioactifs peut être défini de deux façons: soit par le rapport w du nombre de transformations nucléaires au nombre de particules incidentes, soit par la quantité k, rapport de l'activité du radio-isotope naissant au nombre des particules incidentes. Déterminer:

a) la période du radio-isotope formé en supposant connus w et k;

b) le rendement w de la réaction $^7Li(p, n)^7Be$ étant donné qu'après l'irradiation d'une cible de lithium par un faisceau de protons (pendant $t = 2{,}0$ h, le courant en faisceau étant $i = 10$ μA) l'activité de l'isotope ^7Be s'est trouvée $A = 1{,}35 \cdot 10^8$ désintégrations/s et la période $T = 53$ jours.

5.234. Une fine feuille d'or composée de l'isotope stable ^{197}Au est irradiée suivant la normale à sa surface par les neutrons thermiques dont la densité de flux est $J = 1{,}0 \cdot 10^{10}$ particules/(s·cm²). La masse de la feuille est $m = 10$ mg. La capture des neutrons conduit à la formation d'un isotope ^{198}Au à radioactivité β, la section efficace de sa formation étant $\sigma = 98$ barn et la période $T = 2{,}7$ jours. Déterminer:

a) la durée de l'irradiation telle que le nombre de noyaux de ^{197}Au diminue de $\eta = 1{,}0$ %;

b) le nombre maximal de noyaux de ^{198}Au pouvant se former au cours d'une irradiation prolongée.

5.235. Une fine feuille d'un certain isotope stable est exposée à l'irradiation par les neutrons thermiques incidant suivant la normale à sa surface. La capture des neutrons conduit à la formation d'un isotope radioactif à constante de désintégration λ. Etablir la loi de l'accumulation de cette isotope $N(t)$ par unité de surface de la feuille. La densité de flux de neutrons est J, le nombre de noyaux par unité de surface de la feuille n et la section efficace de formation des noyaux actifs σ.

5.236. Une feuille d'or de masse $m = 0{,}20$ g était irradiée pendant $t = 6{,}0$ h par un flux de neutrons thermiques incidant suivant la normale à sa surface. $\tau = 12$ h après la fin de l'irradiation l'activité de la feuille se trouve égale à $A = 1{,}9 \cdot 10^7$ désintégrations/s. Déterminer la densité de flux de neutrons, la section efficace de formation du noyau d'un isotope radioactif étant $\sigma = 96$ barn et sa période $T = 2{,}7$ jours.

5.237. Combien de neutrons y aura-t-il dans la centième génération si la fission débute par $N_0 = 1000$ neutrons et se déroule dans un milieu à coefficient de multiplication $k = 1{,}05$?

5.238. Calculer le nombre de neutrons créés par unité de temps dans une pile à uranium dont la puissance thermique est $P = 100$ MW le nombre moyen de neutrons par événement de fission $\nu = 2{,}5$. On admet que chaque fission libère une énergie $E = 200$ MeV.

5.239. Dans une pile nucléaire à neutrons thermiques la vie moyenne d'une génération de neutrons est $\tau = 0{,}10$ s. En admettant

le coefficient de multiplication $k = 1{,}010$, déterminer:

a) de combien augmente la quantité de neutrons dans la pile et par conséquent la puissance de celle-ci au bout du temps $t = 1{,}0$ mn;

b) la période de la pile T, i.e. le temps au bout duquel sa puissance augmente de e fois.

Particules élémentaires

5.240. Calculer les énergies cinétiques des protons dont les impulsions sont égales à 0,10; 1,0 et 10 GeV/c où c est la célérité de la lumière.

5.241. Déterminer le parcours moyen des mésons π animés d'une énergie cinétique $\eta = 1{,}2$ fois supérieure à leur énergie au repos. La durée de vie moyenne des mésons π extrêmement lents est $\tau_0 = 25{,}5$ ns.

5.242. Les mésons π^- d'énergie cinétique $T = 100$ MeV parcourent, en moyenne, du point de leur naissance au point de leur désintégration une distance $l = 11$ m. Déterminer la durée de vie propre de ces mésons.

5.243. Etant donné un pinceau de mésons π^- d'énergie cinétique T égale à l'énergie au repos de ces particules, trouver le rapport des intensités du faisceau dans les sections distantes l'une de l'autre de $l = 20$ m. La durée de vie propre de ces mésons est $\tau_0 = 25{,}5$ ns.

5.244. Un méson π^+ arrêté se désintègre en un muon et un neutrino. Déterminer l'énergie cinétique du muon et l'énergie du neutrino.

5.245. Calculer l'énergie cinétique du neutron créé par désintégration de l'hypéron Σ^- arrêté ($\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$).

5.246. Un muon positif arrêté se décompose en un positon et deux neutrinos. Déterminer l'énergie cinétique maximale possible du positon.

5.247. Une particule neutre au repos se décompose en un proton d'énergie cinétique $T = 5{,}3$ MeV et un méson π^-. Trouver la masse de cette particule. Quel est son nom?

5.248. Un méson π négatif d'énergie cinétique $T = 50$ MeV se désintègre, en vol, en un muon et un neutrino. Déterminer l'énergie du neutrino projeté sous un angle droit à la direction du mouvement du méson π.

5.249. Un hypéron Σ^+ d'énergie cinétique $T_\Sigma = 320$ MeV se désintègre, en vol, en une particule neutre et un méson π^+, celui-ci étant projeté sous un angle droit à la direction du mouvement de l'hypéron avec l'énergie cinétique $T_\pi = 42$ MeV. Déterminer la masse au repos de la particule neutre (en MeV).

5.250. Un méson π neutre se désintègre, en vol, en deux quanta γ d'énergie égale. L'angle entre directions des projections des quanta γ est $\theta = 60°$. Déterminer l'énergie cinétique du méson π et l'énergie de chaque quantum γ.

5.251. Une particule relativiste de masse au repos m en heurtant une particule immobile de masse M amorce une réaction de création de nouvelles particules: $m + M \to m_1 + m_2 + \ldots$, où à droite figurent les masses au repos des particules créées. En se servant de l'invariance de la quantité $E^2 - p^2c^2$, montrer que l'énergie cinétique de seuil de la particule m pour cette réaction se définit par la formule

$$T_{\text{seuil}} = \frac{(m_1 + m_2 + \ldots)^2 - (m + M)^2}{2M} c^2.$$

5.252. Un positon d'énergie cinétique $T = 750$ keV rencontre un électron libre au repos. A la suite de l'annihilation se créent deux quanta γ de même énergie. Déterminer l'angle entre directions de leurs projections.

5.253. Déterminer l'énergie de seuil d'un quantum γ nécessaire pour produire:

a) une paire électron-positon dans le champ d'un électron au repos;

b) une paire des mésons $\pi^- - \pi^+$ dans le champ d'un proton au repos.

5.254. Les protons d'énergie cinétique T percutent sur une cible d'hydrogène immobile. Déterminer les valeurs du seuil de T pour les réactions suivantes:

a) $p + p \to p + p + p + \tilde{p}$;

b) $p + p \to p + p + \pi^0$.

5.255. Une cible d'hydrogène est irradiée par les mésons π. Calculer l'énergie cinétique de seuil de ces mésons telle que les réactions suivantes deviennent réalisables:

a) $\pi^- + p \to K^+ + \Sigma^-$;

b) $\pi^0 + p \to K^+ + \Lambda^0$.

5.256. Déterminer l'étrangeté S et l'hypercharge Y d'une particule élémentaire neutre dont la projection du spin isotopique est $T_z = +^1/_2$ et la charge baryonique $B = +1$. Quelle est cette particule?

5.257. Parmi les processus ci-dessous indiquer ceux qui sont interdits par la loi de la conservation de la charge leptonique:

1) $n \to p + e^- + \nu$;
2) $\pi^+ \to \mu^+ + e^- + e^+$;
3) $\pi^- \to \mu^- + \nu$;
4) $p + e^- \to n + \nu$;
5) $\mu^+ \to e^+ + \nu + \tilde{\nu}$;
6) $K^- \to \mu^- + \nu$.

5.258. Parmi les processus ci-dessous indiquer ceux qui sont interdits par la loi de la conservation de l'étrangeté:

1) $\pi^- + p \to \Sigma^- + K^+$;
2) $\pi^- + p \to \Sigma^+ + K^-$;
3) $\pi^- + p \to K^+ + K^- + n$;
4) $n + p \to \Lambda^0 + \Sigma^+$;
5) $\pi^- + n \to \Xi + K^+ + K^-$;
6) $K^- + p \to \Omega^- + K^+ + K^0$.

5.259. Indiquer les causes interdisant les processus ci-après:

1) $\Sigma^- \to \Lambda^0 + \pi^-$;
2) $\pi^- + p \to K^+ + K^-$;
3) $K^- + n \to \Omega^- + K^+ + K^0$;
4) $n + p \to \Sigma^+ + \Lambda^0$;
5) $\pi^- \to \mu^- + e^+ + e^-$;
6) $\mu^- \to e^- + \nu_e + \tilde{\nu}_\mu$.

RÉPONSES ET SOLUTIONS

Partie première

Mécanique

1.1. $v = l/2\tau = 3{,}0$ km/h.

1.2. $\Delta t = \tau\sqrt{1-4\langle v\rangle/w\tau} = 15$ s.

1.3. a) 10 cm/s ; b) 25 cm/s ; c) $t_0 = 16$ s ; d) 2,5 et 0,7 cm/s².

1.4 $(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)/|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2| = (\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)/|\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1|$.

1.5. $v' = \sqrt{v_0^2+v^2+2v_0v\cos\varphi} \approx 40$ km/h ; $\varphi' = 19°$.

1.6. $u = \dfrac{v_0}{(1-v_0^2/v'^2)^{-1/2}-1} = 3{,}0$ km/h.

1.7. $\tau_A/\tau_B = \eta\sqrt{\eta^2-1} \approx 1{,}8$.

1.8. $l = vt\sqrt{2(1-\sin\vartheta)} = 22$m.

1.9. $l = (v_1+v_2)\sqrt{v_1v_2/g} = 2{,}5$ m.

1.10. $|\Delta\mathbf{w}| = 1{,}7$ m/s².

1.11. $x_1 - x_2 = l - w\tau(t+\tau/2) = 0{,}24$ km. A la rencontre du train à la vitesse $V = 4{,}0$ m/s.

1.12. a) 0,7 s; b) respectivement 0,7 et 1,3 m.

1.13. $l_{min} = |l_1v_2 - l_2v_1|/\sqrt{v_1^2+v_2^2}$.

1.14. $CD = l/\sqrt{\eta^2-1} = 1{,}0$ km.

1.15. Voir la fig. 194.

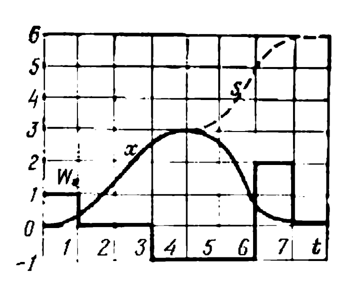


Fig. 194

1.16. a) $\langle v\rangle = \pi R/\tau = 50$ cm/s ; b) $|\langle\mathbf{v}\rangle| = 2R/\tau = 32$ cm/s ; c) $|\langle\mathbf{w}\rangle| = 2\pi R/\tau^2 = 10$ cm/s².

1.17. a) $\mathbf{v}=\mathbf{a}(1-2\alpha t)$; $\mathbf{w}=-2\alpha\mathbf{a}=\text{const}$; b) $\Delta t=1/\alpha$; $s=a/2\alpha$.

1.18. a) $x=v_0 t(1-t/2\tau)$; b) 1,1 ; 9 ; 11 s ;

c) $s=\begin{cases} v_0 T(1-t/2\tau), & t\leqslant\tau, \\ (v_0\tau/2)[1+(1-t/\tau)^2], & t\geqslant\tau. \end{cases}$ Respectivement **24** et 34 cm.

1.19. a) $v=a^2t/2$; $w=a^2/2$; b) $\langle v\rangle=a\sqrt{x}/2$.

1.20 a) $s=(2/3a)\,v_0^{3/2}$; b) $t=(2/a)\sqrt{v_0}$.

1.21. a) $y=-(b/a^2)\,x^2$; b) $\mathbf{v}=a\mathbf{i}-2bt\mathbf{j}$; $\mathbf{w}=-2b\mathbf{j}$; $v=\sqrt{a^2+4b^2t^2}$ $w=2b$; c) $\operatorname{tg}\alpha=a/2bt$; d) $\langle\mathbf{v}\rangle=a\mathbf{i}-bt\mathbf{j}$; $|\langle\mathbf{v}\rangle|=\sqrt{a^2+b^2t^2}$.

1.22. a) $y=x-(\alpha/a)\,x^2$; b) $v=a\sqrt{1+(1-2\alpha t)^2}$; $w=2\alpha a=\text{const}$; c) $t_0=1/\alpha$.

1.23. a) $s=a\omega\tau$; b) $\pi/2$.

1.24. $v_0=\sqrt{(1+a^2)\,w/2b}$.

1.25. a) $\mathbf{r}=\mathbf{v}_0 t+\mathbf{g}t^2/2$; b) $\langle\mathbf{v}\rangle_t=\mathbf{v}_0+\mathbf{g}t/2$; $\langle\mathbf{v}\rangle=\mathbf{v}_0-\mathbf{g}\,(\mathbf{v}_0\mathbf{g})/g^2$.

1.26. a) $\tau=2\,(v_0/g)\sin\alpha$; b) $h=(v_0^2/2g)\sin^2\alpha$, $l=(v_0^2/g)\sin 2\alpha$; $\alpha=76°$ c) $y=x\operatorname{tg}\alpha-(g/2v_0^2\cos^2\alpha)\,x^2$; d) $R_1=v_0^2/g\cos\alpha$, $R_2=(v_0^2/g)\cos^2\alpha$.

1.27. Voir la fig. 195.

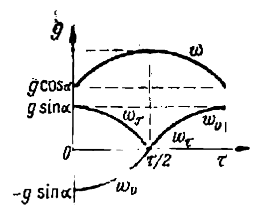


Fig. 195

1.28. Au bout de 0,41 ou 0,71 mn (en fonction de l'angle initial).

1.29. $\Delta t=\dfrac{2v_0}{g}\,\dfrac{\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)}{\cos\vartheta_1+\cos\vartheta_2}=11$ s.

1.30. a) $x=(a/2v_0)\,y^2$; b) $w=av_0$, $w_\tau=a^2y/\sqrt{1+(ay/v_0)^2}$, $w_n=$ $=av_0/\sqrt{1+(ay/v_0)^2}$.

1.31. a) $y=(b/2a)\,x^2$; b) $R=v^2/w_n=v^2/\sqrt{w^2-w_\tau^2}=(a/b)\,[1+(xb/a)^2]^{3/2}$.

1.32. $v=\sqrt{2ax}$.

1.33. $w=a\sqrt{1+(4\pi n)^2}=0{,}8$ m/s².

1.34. a) $v=v_0/(1+v_0t/R)=v_0e^{-s/R}$; b) $w=\sqrt{2}\,(v_0^2/R)\,e^{-2s/R}=\sqrt{2}\,v^2/R$.

1.35. $\operatorname{tg}\alpha=2s/R$.

1.36. a) $w_0=a^2\omega^2/R=2{,}6$ m/s² ; $w_{|a|}=a\omega^2=3{,}2$ m/s² ; b) $w_{\min}=$ $=a\omega^2\sqrt{1-(R/2a)^2}=2{,}5$ m/s², $l_m=\pm a\sqrt{1-R^2/2a^2}=\pm 0{,}37$ m.

1.37. $\rho=a^3/2bs$; $w=a\sqrt{1+(4bs^2/a^3)^2}$.

1.38. a) $w=2av^2$, $R=1/2a$; b) $w=bv^2/a^2$, $R=a^2/b$.

1.39. $v=2R\omega=0{,}40$ m/s ; $w=4R\omega^2=0{,}32$ m/s².

1.40. $w=(v/t)\sqrt{1+(2at^2)^2}=0{,}7$ m/s².

1.41. a) $\langle\omega\rangle=2a/3=4$ rd/s ; $\langle\beta\rangle=\sqrt{3ab}=6$ rd/s² ; b) $\beta=2\sqrt{3ab}=12$ rd/s².

1.42. $t=\sqrt[3]{(4/a)\,\mathrm{tg}\,\alpha}=7$ s.

1.43. $\langle\omega\rangle=\omega_0/3$.

1.44. a) $\varphi=(1-e^{-at})\,\omega_0/a$; b) $\omega=\omega_0 e^{-at}$.

1.45. $\omega_z=\pm\sqrt{2\beta_0 \sin\varphi}$, voir la fig. 196.

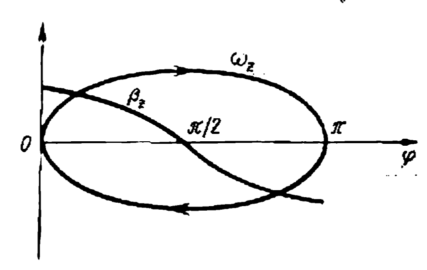


Fig. 196

1.46. a) $y=v^2/\beta x$ (hyperbole); b) $y=\sqrt{2wx}/\omega$ (parabole).

1.47. a) $w_A=v^2/R=2{,}0$ m/s², le vecteur $\mathbf{w}_A$ est constamment dirigé vers le centre de la roue; b) $s=8R=4{,}0$ m.

1.48. a) $v_A=2wt=10$ cm/s, $v_B=\sqrt{2}\,wt=7$ cm/s, $v_O=0$; b) $w_A=2w\times\times\sqrt{1+(wt^2/2R)^2}=5{,}6$ cm/s², $w_B=w\sqrt{1+(1-wt^2/R)^2}=2{,}5$ cm/s², $w_O==w^2t^2/R=2{,}5$ cm/s².

1.49. $\omega=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}=5$ rd/s, $\beta=\omega_1\omega_2=12$ rd/s².

1.50. a) $\omega=at\sqrt{1+(bt/a)^2}=8$ rd/s, $\beta=a\sqrt{1+(2bt/a)^2}=1{,}3$ rd/s²; b) 17°.

1.51. a) $\omega=v/r\cos\alpha=2{,}3$ rd/s, 60°; b) $\beta=(v/r)^2\,\mathrm{tg}\,\alpha=2{,}3$ rd/s².

1.52. $\omega=\omega_0\sqrt{1+(\beta_0 t/\omega_0)^2}=0{,}6$ rd/s, $\beta=\beta_0\sqrt{1+\omega_0^2 t^2}=0{,}2$ rd/s².

1.53. $\Delta m=2mw/(g+w)$.

1.54. $\mathbf{w}=\dfrac{m_0-k\,(m_1+m_2)}{m_0+m_1+m_2}\,\mathbf{g}$, $T=\dfrac{m_0\,(1+k)}{m_0+m_1+m_2}\,m_2 g$.

1.55. a) $F=\dfrac{(k_1-k_2)\,m_1 m_2 g\cos\alpha}{m_1+m_2}$; b) $\mathrm{tg}\,\alpha_{\min}=\dfrac{k_1m_1+k_2m_2}{m_1+m_2}$.

1.56. $k=[(\eta^2-1)/(\eta^2+1)]\,\mathrm{tg}\,\alpha=0{,}16$.

1.57. a) $m_2/m_1>\sin\alpha+k\cos\alpha$; b) $m_2/m_1<\sin\alpha-k\cos\alpha$; c) $\sin\alpha-\\-k\cos\alpha<m_2/m_1<\sin\alpha+k\cos\alpha$.

1.58. $w_1=w_2=at/(m_1+m_2)$ pour $t\leqslant t_0$; $w_1=kgm_2/m_1$, $w_2=(at-km_2g)/m_2$ pour $t\geqslant t_0$. Ici $t_0=kgm_2\,(m_1+m_2)/am_1$. Voir la fig. 197.

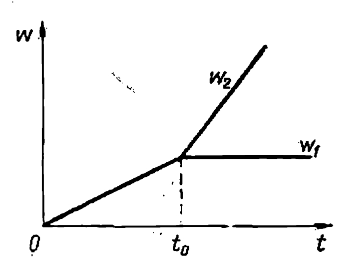


Fig. 197

1.59. $\operatorname{tg} 2\alpha = -1/k$, $\alpha = 49°$; $t_{\min} = 1{,}0$ s.
1.60. $\operatorname{tg} \beta = k$; $T_{\min} = mg (\sin \alpha + k \cos \alpha)/\sqrt{1+k^2}$.
1.61. a) $v = \dfrac{mg^2 \cos \alpha}{2a \sin^2 \alpha}$; b) $s = \dfrac{m^2g^3 \cos \alpha}{6a^2 \sin^3 \alpha}$.
1.62. $v = \sqrt{(2g/3a) \sin \alpha}$.
1.63. $\tau = \sqrt{2l/(3w + kg)}$.
1.64. a) $\mathbf{w}_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)\,\mathbf{g} + 2m_2\mathbf{w}_0}{m_1 + m_2}$, $\mathbf{w}_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{g} - \mathbf{w}_0)$; b) $\mathbf{F} = \dfrac{4m_1m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{g} - \mathbf{w}_0)$.
1.65. $\mathbf{w}_1 = \dfrac{4m_1m_2 + m_0 (m_1 - m_2)}{4m_1m_2 + m_0 (m_1 + m_2)} \mathbf{g}$.
1.66. $F_{fr} = 2lmM/(M - m)\, t^2$.
1.67. $t = \sqrt{2l\,(4+\eta)/3g\,(2-\eta)} = 1{,}4$ s.
1.68. $H = 6h\eta/(\eta + 4) = 0{,}6$ m.
1.69. $w = g \sqrt{2}/(2 + k + M/m)$.
1.70. $w_{\min} = g\,(1 - k)/(1 + k)$.
1.71. $w_{\max} = g\,(1 + k \operatorname{cotg} \alpha)/(\operatorname{cotg} \alpha - k)$.
1.72. $w = \dfrac{g \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + m_1 m_2}$.
1.73. $w = \dfrac{mg \sin \alpha}{M + 2m\,(1 - \cos \alpha)}$.
1.74. a) $|\langle \mathbf{F} \rangle| = 2\sqrt{2}\, mv^2/\pi R$; b) $|\langle \mathbf{F} \rangle| = mw_\tau$.
1.75. Respectivement 2,1 ; 0,7 et 1,5 kN.
1.76. a) $w = g\sqrt{1 + 3\cos^2 \vartheta}$, $T = 3mg \cos \vartheta$; b) $T = mg\sqrt{3}$; c) $\cos \vartheta = 1/\sqrt{3}$, $\vartheta = 54{,}7°$.
1.77. Environ 53°.
1.78. $\vartheta = \arccos (2/3) \approx 48°$, $v = \sqrt{2gR/3}$.
1.79. $\varepsilon = (\varkappa/m\omega^2 - 1)^{-1}$. Est indépendant du sens de rotation.
1.80. $r = R/2$, $v_{\max} = \sqrt{kgR}/2$.
1.81. $T = (\operatorname{cotg} \vartheta + \omega^2 R/g)\, mg/2\pi$.

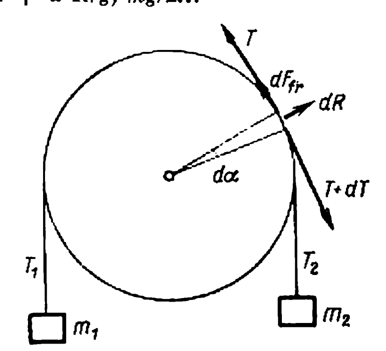


Fig. 198

1.82. a) Considérons un petit élément de fil sur la poulie (fig. 198). Son poids étant négligeable, $dT = dF_{fr} = k\,dR$ et $dR = T\,d\alpha$. D'où $dT/T = k\,d\alpha$. En intégrant cette équation, il vient $k = (\ln \eta_0)/\pi$; b) $w = g\,(\eta - \eta_0)/(\eta + \eta_0)$.
1.83. $F = (mv_0^2/R) \cos^2 \alpha$.

1.84. $\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{r}$, où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur du point par rapport à l'origine des coordonnées; $F = m\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2}$.
1.85. a) $\Delta\mathbf{p} = m\mathbf{g}t$; b) $|\Delta\mathbf{p}| = -2m\,(\mathbf{v}_0\mathbf{g})/g$.
1.86. a) $p = a\tau^3/6$; b) $s = a\tau^4/12\ m$.
1.87. $s = (F_0/m\omega^2)\ (\omega t - \sin \omega t)$, voir la fig. 199.

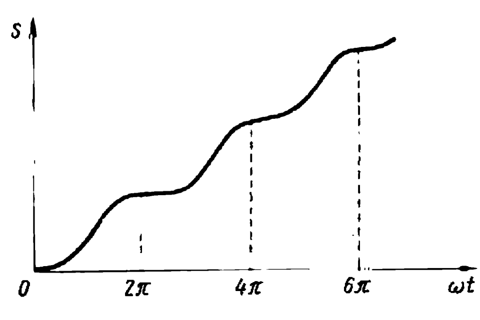


Fig. 199

1.88. $t = \pi/\omega$; $s = 2F_0/m\omega^2$; $v_{max} = F_0/m\omega$.
1.89. a) $v = v_0e^{-tr/m}$; $t \to \infty$; b) $v = v_0 - sr/m$, $s_{total} = mv_0/r$; c) $\langle v \rangle = v_0\,(\eta - 1)/\eta \ln \eta$.
1.90. $t = h\,(v_0 - v)/v_0\, v \ln (v_0/v)$.
1.91. a) $s = (2/a)\operatorname{tg}\alpha$; b) $v_{max} = \sin\alpha \cdot \sqrt{g/a\cos\alpha}$.
1.92. $s = (a/6m)\,(t - t_0)^3$, où $t_0 = kmg/a$ est l'instant du début du mouvement.
1.93. $v' = v_0/\sqrt{1 + kv_0/mg}$.
1.94. a) $v = (2F/m\omega)\sin(\omega t/2)$; b) $\Delta s = 8F/m\omega^2$; $\langle v \rangle = 4F/\pi m\omega$.
1.95. $v = v_0/(1 + \cos\varphi)$.
I n d i c a t i o n. Ici $w_\tau = -w_x$, de sorte que $v = -v_x + \text{const}$. D'après la condition initiale il vient que $\text{const} = v_0$. En outre, $v_x = v\cos\varphi$.
1.96. $w = [1 - \cos(l/R)]\,Rg/l$.
1.97. a) $v = \sqrt{2gR/3}$; b) $\cos\vartheta_0 = \dfrac{2 + \eta\sqrt{5 + 9\eta^2}}{3\,(1 + \eta^2)}$, où $\eta = w_0/g$; $\vartheta_0 \approx 17°$.
1.98. Pour $n < 1$ y compris les valeurs négatives; $r_{stab} = (mv^2/a)^{1/(1-n)}$.
1.99. Si $\omega^2R > g$, on a deux positions d'équilibre: $\vartheta_1 = 0$ et $\vartheta_2 = \arccos(g/\omega^2R)$. Si $\omega^2R < g$, la position d'équilibre n'est réalisée que pour $\vartheta_1 = 0$. Tant qu'il n'y a qu'une seule position d'équilibre, inférieure, elle est stable. Dès qu'il apparaît la seconde position d'équilibre (qui est toujours stable), la position inférieure devient instable.
1.100. $h = (\omega s^2/v)\sin\varphi = 7$ cm.
1.101. $F = m\sqrt{g^2 + \omega^4r^2 + (2v'\omega)^2} = 8$ N.
1.102. $F_C = 2m\omega^2 r\sqrt{1 + (v_0/\omega r)^2} = 2{,}8$ N.
1.103. a) $w' = \omega^2R$; b) $F_{in} = m\omega^2 r\sqrt{(2R/r)^2 - 1}$.
1.104. $F_{cf} = m\omega^2R\sqrt{5/9} = 8$ N, $F_C = (2m\omega^2R/3)\sqrt{5 + 8g/3\omega^2R} = 17$ N.
1.105. a) $F = 2mv\omega\sin\varphi = 3{,}8$ kN, où ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe;
b) $F = m\omega\,(\omega R\cos\varphi \pm 2v)\sin\varphi$; $F_+ = 33$ kN, $F_- = 25$ kN, le signe plus correspondant au mouvement de l'Ouest à l'Est, le signe moins à celui dans le sens opposé.

1.106. S'écartera vers l'Est d'une distance $x \approx (2\omega/3)\sqrt{2h^3/g} = 24$ cm. Ici ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe.

1.107. $A = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -17$ J.

1.108. $A = ma^4t^2/8$.

1.109. $F = 2as\sqrt{1+(s/R)^2}$.

1.110. $A = -(1-\eta)\,mgl/2 = -1{,}3$ J.

1.111. $\langle P \rangle = 0$; $P = mg\,(gt - v_0 \sin\alpha)$.

1.112. $P = mRat$, $\langle P \rangle = mRat/2$.

1.113. a) $\langle P \rangle = -kmgv_0/2 = -2$W ; b) $P_{max} = -mv_0^2\sqrt{\alpha g}/2$.

1.114. $A = m\omega^2(r_2^2 - r_1^2)/2 = -0{,}20$ J.

1.115. $A_{min} = k(\Delta l)^2/2$, où $k = k_1k_2/(k_1+k_2)$.

1.116. $A = 3mg/4a$; $\Delta U = mg/2a$.

1.117. a) $r_0 = 2a/b$ stable; b) $F_{max} = b^3/27a^2$, voir la fig. 200.

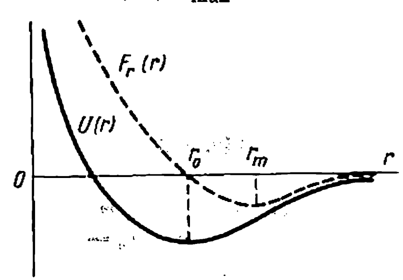


Fig. 200

1.118. a) Non ; b) les ellipses dont le rapport des demi-axes est $a/b = \sqrt{\beta/\alpha}$; également les ellipses mais avec $a/b = \beta/\alpha$.

1.119. C'est le second champ de forces qui est potentiel.

1.120. $s = v_0^2/2g\,(\sin\alpha + k\cos\alpha)$; $A_{fr} = -mv_0^2k/2\,(k + tg\,\alpha)$.

1.121. $h = H/2$, $s_{max} = H$.

1.122. $v = {}^2/_3\sqrt{gh/3}$.

1.123. $v_{min} = \sqrt{5gl}$; $T = 3\,mg$.

1.124. $t = l_0^2/2v_0R$.

1.125. $\Delta l = (1 + \sqrt{1 + 2kl/mg})\,mg/k$.

1.126. $v = \sqrt{19gl_0/32} = 1{,}7$ m/s.

1.127. $A = \dfrac{kmgl_0}{2}\,\dfrac{1-\cos\vartheta}{(\sin\vartheta + k\cos\vartheta)\cos\vartheta} = 0{,}09$ J.

1.128. $A = kl_0^2\eta\,(1+\eta)/2\,(1-\eta)^2$, où $\eta = m\omega^2/k$.

1.129. $\mathbf{w}_C = \mathbf{g}\,(m_1 - m_2)^2/(m_1+m_2)^2$.

1.131. $r = (g/\omega^2)\,\mathrm{tg}\,\vartheta = 0{,}8$ cm, $T = mg/\cos\vartheta = 5$ N.

1.132. a) $F_{fr} = mg\,[\sin\alpha + (\omega^2l/g)\cos\alpha] = 6$ N ; b) $\omega <$ $< \sqrt{g\,(k - \mathrm{tg}\,\alpha)/l\,(1 + k\,\mathrm{tg}\,\alpha)} = 2$ rd/s.

1.133. a) $\mathbf{V} = (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)/(m_1+m_2)$; $b = T = \mu\,(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2/2$, où $\mu =$ $= m_1m_2/(m_1+m_2)$.

1.134. $E = \widetilde{E} + mV^2/2$.

1.135. $\widetilde{E} = \mu\,(v_1^2 + v_2^2)/2$, où $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$.

1.136. $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + m\mathbf{g}t$, où $\mathbf{p}_0 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$, $m = (m_1+m_2)$; $\mathbf{r}_C = \mathbf{v}_0t + \mathbf{g}t^2/2$, où $\mathbf{v}_0 = (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)/(m_1+m_2)$.

1.137. a) $\Delta l > 3\,mg/k$; b) $h = (1 + k\Delta l/mg)^2\,mg/8k = 8mg/k$.

1.138. $\mathbf{v}_1 = -m\mathbf{v}/(M-m)$; $\mathbf{v}_2 = M\mathbf{v}/(M-m)$.

1.139. $\mathbf{V}_{ar} = \mathbf{v}_0 - \frac{m}{M+m}\mathbf{u}$; $\mathbf{v}_{av} = \mathbf{v}_0 + \frac{mM}{(M+m)^2}\mathbf{u}$.

1.140. 1) $\mathbf{v}_1 = -\frac{2m}{M+2m}\mathbf{u}$; 2) $\mathbf{v}_2 = -\frac{m(2M+3m)}{(M+m)(M+2m)}\mathbf{u}$, $v_2/v_1 = 1 + m/2(M+m) > 1$.

1.141. $p = 2m\sqrt{2gl}/3 = 3{,}5$ kgf·m/s.

1.142. $\Delta p = m\sqrt{2gh}(1+\eta)/(1-\eta) = 0{,}2$ kgf·m/s.

1.143. a) $\mathbf{l} = -\frac{m}{M+m}\mathbf{l}'$; b) $\mathbf{F} = -\frac{mM}{M+m}\frac{dv'}{dt}$.

1.144. $\mathbf{l} = (m/2M)\,\mathbf{l}'$.

1.145. $\tau = (p\cos\alpha - M\sqrt{2gl\sin\alpha})/Mg\sin\alpha$.

1.146. a) $v = (2M/m)\sqrt{gl}\sin(\vartheta/2)$; b) $\eta \approx 1 - m/M$.

1.147. 1) $A = -\mu gh$, où $\mu = mM/(m+M)$. 2) Oui.

1.149. $\mathbf{v} = 1{,}0\mathbf{i} + 2{,}0\mathbf{j} - 4{,}0\,\mathbf{k}$ m/s, $v \approx 4{,}6$ m/s.

1.150. $\Delta T = -\mu(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2/2$, où $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$.

1.151. a) $\eta = 2m_1/(m_1+m_2)$; b) $\eta = 4m_1m_2/(m_1+m_2)^2$.

1.152. a) $m_1/m_2 = 1/3$; b) $m_1/m_2 = 1 + 2\cos\theta = 2{,}0$.

1.153. Se déplacera dans le même sens mais avec $v' = (1-\sqrt{1-2\eta})\,v/2 \approx \eta v/2 = 5$ cm/s.

1.154. $\Delta T/T = (1 + m/M)\,\mathrm{tg}^2\,\vartheta + m/M - 1 = -40\,\%$.

1.155. a) $p = \mu\sqrt{v_1^2+v_2^2}$; b) $T = \mu(v_1^2+v_2^2)/2$. Ici $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$.

1.156. $\sin\vartheta_{max} = m_2/m_1$.

1.157. $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}(2-\eta^2)/(6-\eta^2)$. Respectivement pour η inférieur, égal et supérieur à $\sqrt{2}$.

1.159. Supposons qu'à un certain moment t la fusée ait une masse m et une vitesse $\mathbf{v}$ (par rapport au référentiel qui nous intéresse). Soit un référentiel galiléen animé de même vitesse que la fusée à l'instant *considéré*. Dans ce référentiel, l'accroissement d'impulsion du système « fusée-portion de gaz éjectée » au bout du temps dt est $d\mathbf{p} = m\,d\mathbf{v} + \mu\,dt\cdot\mathbf{u} = \mathbf{F}\,dt$. La suite en est évidente.

1.160. $\mathbf{v} = -\mathbf{u}\ln(m_0/m)$.

1.161. $m = m_0e^{-wt/u}$.

1.162. $\alpha = (u/v_0)\ln(m_0/m)$.

1.163. $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}}{\mu}\ln\frac{m_0}{m_0-\mu t}$; $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{F}}{m_0-\mu t}$.

1.164. $\mathbf{v} = \mathbf{F}t/m_0(1+\mu t/m_0)$; $\mathbf{w} = \mathbf{F}/m_0(1+\mu t/m_0)^2$.

1.165. $v = \sqrt{2gh\ln(l/h)}$.

1.166. $\mathbf{N} = 2\mathbf{b}\sqrt{a/b}$.

1.167. $M = (mgv_0t^2/2)\cos\alpha$; $M = (mv_0^3 2g)\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha = 37$ kgf·m²/s.

1.168. a) Par rapport à tous les points d'une droite perpendiculaire à la paroi et passant par le point O; b) $|\Delta\mathbf{M}| = 2mvl\cos\alpha$.

1.169. Par rapport au centre de la circonférence. $|\Delta\mathbf{M}| = 2 \times \sqrt{1-(g/\omega^2l)^2}\,mgl/\omega$.

1.170. $\Delta M = hmV$.

1.171. $M = m\omega v_0^2t^2$.

1.172. $m = 2kr_1^2/r_2^2$.

1.173. $v_0 = \sqrt{2gl/\cos\vartheta}$.

1.174. $F = m\omega_0^2r_0^4/r^3$.

1.175. $M_z = Rmgt$.

1.176. $M = Rmgt\sin\alpha$. Ne changera pas.

1.177. $\mathbf{M}' = \mathbf{M} - [\mathbf{r}_0\mathbf{p}]$. Dans le cas où $\mathbf{p} = 0$, i.e. dans le référentiel du centre d'inertie.

1.179. $\tilde{M} = lmv_0/3$.

1.180. $\varepsilon_{max} \approx mv_0^2/\varkappa l_0^2$. La résolution du problème est plus aisée dans le référentiel du centre d'inertie.

1.181. $v = c\sqrt{\eta(2-\eta)} = 0{,}1\ c$, où c est la célérité de la lumière.

1.182. $S' = 3S/5$; un angle est de 62° et les deux autres de 59°.

1.183. $l_0 = l\sqrt{(1-\beta^2\sin^2\theta)/(1-\beta^2)} = 1{,}08$ m où $\beta = v/c$.

1.184. $l_0 = \sqrt{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2} = 6{,}0$ m ; $v = c\sqrt{1-\Delta x_1/\Delta x_2} = 2{,}2\cdot 10^8$ m/s.

1.185. $s = c\tau\sqrt{1-(\tau_0/\tau)^2} = 5$ m.

1.186. a) $\tau_0 = (l/v)\sqrt{1-(v/c)^2} = 1{,}4$ µs ; b) $l' = l\sqrt{1-(v/c)^2} = 0{,}42$ km.

1.187. $l_0 = v\tau/\sqrt{1-(v/c)^2} = 17$ m.

1.188. Il faut se convaincre que si $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$, alors $\Delta t' = t_2' - t_1' > 0$.

1.189. La particule précédente se désintègre plus tard de $\Delta t = l\beta/c \times (1-\beta^2) = 20$ µs où $\beta = v/c$.

1.190. $v = \dfrac{2l_0/\Delta t}{1+(l_0/c\Delta t)^2}$.

1.191. a) $\tau(B) = l_0/v$; $\tau(B') = (l_0/v)\sqrt{1-(v/c)^2}$; b) $\tau(A) = (l_0/v) \times \sqrt{1-(v/c)^2}$; $\tau(A') = l_0/v$.

1.192. Du point de vue du référentiel K; voir la fig. 201.

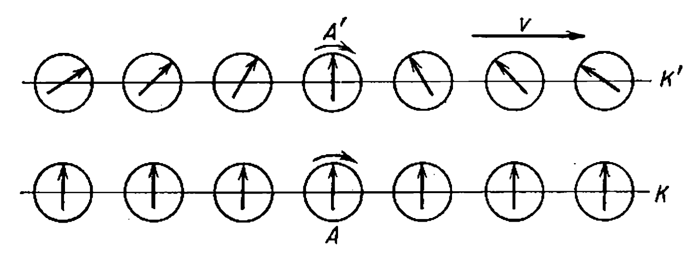


Fig. 201

1.193. $x = (1-\sqrt{1-\beta^2})\,c/\beta$, où $\beta = V/c$.

1.195. a) 13,3 ns; b) 4 m.

1.196. a) $l = l_0\left|\sqrt{1-\beta^2}\cos\theta' - \sin\theta'\right|$; b) $l = \begin{cases} 0 \text{ pour } \operatorname{tg}\theta' = \sqrt{1-\beta^2}/\beta, \\ l_0 \text{ pour } \operatorname{tg}\theta' = -\beta/\sqrt{1-\beta^2}. \end{cases}$

Ici $\beta = V/c$.

1.197. $v' = \sqrt{\dfrac{(v_x - V)^2 + v_y^2(1-V^2/c^2)}{1-v_xV/c^2}}$.

1.198. a) 1,25 s; b) $v = (v_1+v_2)/(1+v_1v_2/c^2) = 0{,}91$ s.

1.199. $l = l_0\dfrac{1-(v/c)^2}{1+(v/c)^2}$.

1.200. a) $v = \sqrt{v_1^2+v_2^2}$; b) $v = \sqrt{v_1^2+v_2^2-(v_1v_2/c)^2}$.

1.201. $s = \tau_0\sqrt{\dfrac{V^2+(1-\beta^2)\,v'^2}{(1-\beta^2)(1-v'^2/c^2)}}$, où $\beta = V/c$.

1.202. $\operatorname{tg}\vartheta' = \dfrac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\vartheta}{\cos\theta - V/v}$, où $\beta = V/c$.

1.203. $\operatorname{tg}\vartheta = v'V/c^2\,\sqrt{1-(V/c)^2}$.

1.204. a) $w' = w\,(1-\beta^2)^{3/2}/(1-\beta v/c)^3$; b) $w' = w\,(1-\beta^2)$. [Ici $\beta = V/c$.

1.205. Servons-nous de la relation entre l'accélération w' et l'accélération w dans le référentiel lié à la Terre:

$$w' = (1 - v^2/c^2)^{-3/2}\,dv/dt.$$

Cette formule est donnée dans la réponse du problème précédent (point a) où il faut poser $V = v$. En intégrant cette équation (pour $w' = \text{const}$), il vient: $v = w't/\sqrt{1+(w't/c)^2}$. La distance recherchée $l = \left(\sqrt{1+(w'/t/c)^2} - 1\right) c^2/w' = 0{,}91$ année-lumière; $(c-v)/c \approx (c/w't)^2/2 = 0{,}47\ \%$.

1.206. Comme $v = w't/\sqrt{1+(w't/c)^2}$, il vient

$$\tau_0 = \int_0^{\tau} \frac{dt}{\sqrt{1+(w't/c)^2}} = \frac{c}{w'}\ln\left[\frac{w'\tau}{c} + \sqrt{1+\left(\frac{w'\tau}{c}\right)^2}\right] = 3{,}5 \text{ mois.}$$

1.207. $m/m_0 \approx 1/\sqrt{2(1-\beta)} \approx 70$, où $\beta = v/c$.

1.208. $v = c\sqrt{\eta/(1+\eta)} = 0{,}3c$, où c est la célérité de la lumière.

1.209. $(c-v)/c = 1 - [1+(m_0c/p)^2]^{-1/2} = 0{,}9\%$.

1.210. $v = (c/\eta)\sqrt{\eta^2-1} = c\sqrt{3}/2$.

1.211. $A = 0{,}42\ m_0c^2$ au lieu de $0{,}14\ m_0c^2$ dans le cas classique.

1.212. $v = c\sqrt{3}/2 = 2{,}6\cdot 10^8$ m/s.

1.213. Pour $\varepsilon \ll 1$ le rapport $T/m_0c^2 \lessapprox 4\varepsilon/3 = 0{,}013$.

1.214. $p = \dfrac{1}{c}\sqrt{T(T+2m_0c^2)} = 1{,}09$ GeV/s.

1.215. $F = (I/ec)\sqrt{T(T+2m_0c^2)}$; $P = TI/e$.

1.216. $p = 2\ nmv^2/(1 - v^2/c^2)$.

1.217. $\mathbf{v} = \mathbf{F}ct/\sqrt{m_0^2c^2+F^2t^2}$; $l = \sqrt{(m_0c^2/F)^2+c^2t^2} - m_0c^2/F$.

1.218. $F = m_0c^2/a$.

1.219. $l = \sqrt{T(T+2m_0c^2)}/ceE = 3{,}0$ ns.

1.220. $w = eE/m_0\,(1+T/m_0c^2)^3$.

1.221. a) Dans deux cas: $\mathbf{F} \parallel \mathbf{v}$ et $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$; b) $\mathbf{F}_\perp = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathbf{w}$; $F_\parallel = \dfrac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}}\mathbf{w}$, où $\beta = v/c$.

1.222. a) $\operatorname{tg}\vartheta = (eEt/m_0v_0)\sqrt{1-(v_0/c)^2}$, où e et m_0 sont respectivement la charge et la masse au repos du proton; b) $v_x = v_0/\sqrt{1+(1-v_0^2/c^2)(eEt/m_0c)^2}$.

1.223. $v = c/\sqrt{1+(m_0c^2/e\rho B)^2}$; $w = v^2/\rho$.

1.225. $\varepsilon' = \varepsilon\sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}$, où $\beta = V/c$; $V = 3c/5$.

1.226. $E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$, où m_0 est la masse au repos de la particule.

1.227. a) $\widetilde{T} = 2m_0c^2\,[\sqrt{1+T/2m_0c^2} - 1] = 777$ MeV, $\widetilde{p} = \sqrt{m_0cT/2} = 940$ MeV/s; b) $V = c\sqrt{T/(T+2m_0c^2)} = 2{,}12\cdot 10^8$ m/s.

1.228. $M_0 = \sqrt{2m_0(T+2m_0c^2)}/c$, $V = c\sqrt{T/(T+2m_0c^2)}$.

1.229. $T' = 2T\,(T+2m_0c^2)/m_0c^2 = 1{,}43\cdot 10^3$ GeV.

1.230. $E_{1\max} = \dfrac{m_0^2+m_1^2-(m_2+m_3)^2}{2m_0}c^2$. La particule m_1 aura l'énergie maximale dans le cas où l'énergie du système de deux autres particules m_2 et m_3 sera minimale, i.e. elles se déplacent comme un ensemble.

1.231. $\frac{v}{c}=\frac{1-(m/m_0)^{2u/c}}{1+(m/m_0)^{2u/c}}$. Se servir de la loi de la conservation de l'impulsion (comme dans le problème 1.159) et de la formule relativiste de la transformation de la vitesse.

1.232. $T = 2\pi\gamma M/v^3 = 225$ jours.

1.233. a) De 5,2 fois; b) 13 km/s, $2{,}2\cdot 10^{-4}$ m/s^2.

1.234. $T = \pi\sqrt{(r+R)^3/2\gamma M}$. Il suffit de considérer le mouvement suivant une circonférence dont le rayon est égal au demi-grand axe de l'ellipse donnée, i.e. $(r+R)/2$, la période d'après Kepler étant la même.

1.235. La chute d'un corps sur le Soleil peut être considérée comme le mouvement suivant une ellipse très allongée (à la limite, dégénérée), dont le grand axe est pratiquement égal au rayon R de l'orbite terrestre. Alors, d'après Kepler, $(2\tau/T)^2 = [(R/2)/R]^3$, où τ est la durée de la chute (la durée d'un demi-tour suivant l'ellipse allongée), T, la période d'évolution de la Terre autour du Soleil. D'où $\tau = T/4\sqrt{2} = 65$ jours.

1.236. Ne changeront pas.

1.237. $l=\sqrt[3]{\gamma M\,(T/2\pi)^2}$.

1.238. a) $U = -\gamma m_1 m_2/r$; b) $U = -\gamma\,(mM/l)\times\ln(1+l/a)$, $F = \gamma mM/a\,(a+l)$.

1.239. $M=m\sqrt{2\gamma m_S r_1 r_2/(r_1+r_2)}$, où m_S est la masse du Soleil.

1.240. $E = T + U = -\gamma m m_S/2a$, où m_S est la masse du Soleil.

1.241. $r_m=\frac{r_0}{2-\eta}\,[1\pm\sqrt{1-(2-\eta)\,\eta\sin^2\alpha}]$, où $\eta=r_0v_0^2/\gamma m_S$, m_S étant la masse du Soleil.

1.242. $r_{min}=(\gamma m_S/v_0^2)\,[\sqrt{1+(lv_0^2/\gamma m_S)^2}-1]$, m_S étant la masse du Soleil.

1.243. a) Considérons d'abord une mince couche sphérique de rayon ρ et

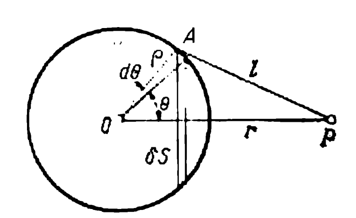


Fig. 202

de masse δM. L'énergie de l'interaction de la particule avec la zone élémentaire δS de cette couche (fig. 202) est

$$dU = -\gamma\,(m\delta M/2l)\sin\theta\,d\theta. \qquad (*)$$

Pour $\triangle OAP$, il vient d'après le théorème des cosinus $l^2=\rho^2+r^2-2\rho r\cos\theta$. En se servant de la différentielle de cette expression, on ramène la formule (*) à la forme intégrable. L'intégration par rapport à toute la couche conduit à $\delta U = -\gamma m\delta M/r$. Enfin, en étendant l'intégration à toutes les couches de la sphère, il vient $U = -\gamma mM/r$;
b) $F_r = -\partial U/\partial r = -\gamma mM/r^2$.

1.244. Considérons d'abord une mince couche sphérique de substance (fig. 203). Construisons un cône de petit angle d'ouverture et de sommet au point A. Les aires des sections découpées par ce cône dans la couche $dS_1 : dS_2 =$

$= r_1^2 : r_2^2$. Les masses des portions découpées sont proportionnelles aux sections de ces dernières. D'où il vient que les forces d'attraction de la particule A par ces portions sont égales et de sens opposé. La suite en est évidente.

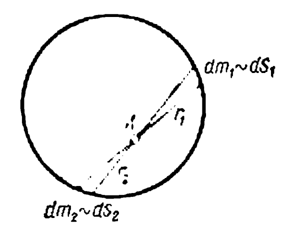


Fig. 203

1.245. a) $\mathbf{F} = -\gamma mM\mathbf{r}/R^3$; b) $U = -3\gamma mM/2R$.

1.246. $U = \begin{cases} -\gamma mM/r, & r \geqslant R, \\ -3\gamma mM(1 - r^2/3R^2)/2R, & r \leqslant R. \end{cases}$ Voir la fig. 204.

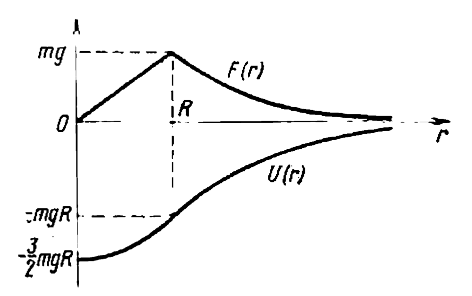


Fig. 204

1.247. $\mathbf{G} = -(4\pi/3)\,\gamma\rho\mathbf{l}$. A l'intérieur de la cavité le champ est uniforme.

1.248. $p = (3\gamma M^2/8\pi R^4)(1 - r^2/R^2)$. Environ 180 GPa.

1.249. a) Décomposons la couche sphérique en portions élémentaires de masse δm chacune. L'énergie d'interaction de chaque élément avec tous les autres sera alors $\delta U = -\gamma m\delta m/R$. En sommant sur tous les éléments et en tenant compte de ce que chaque couple d'éléments en interaction entre alors deux fois, il vient $U = -\gamma m^2/2R$; b) $U = -3\gamma m^2/5R$.

1.250. $\Delta t \approx \dfrac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}} \dfrac{r^{3/2}}{3\Delta r/2r + \delta} = \begin{cases} 4{,}5 \text{ jours } (\delta = 0), \\ 0{,}80 \text{ h } \quad (\delta = 2). \end{cases}$

1.251. $w_1 : w_2 : w_3 = 1 : 0{,}0034 : 0{,}0006$.

1.252. 32 km; 2 650 km.

1.253. $h = R/(2gR/v_0^2 - 1)$.

1.254. $h = R\,(gR/v^2 - 1)$.

1.255. $r = \sqrt[3]{\gamma M\,(T/2\pi)^2} = 4{,}2 \cdot 10^4$ km, où M et T sont respectivement la masse de la Terre et sa période de révolution autour de son axe; 3,1 km/s, 0,22 m/s².

1.256. $m = (4\pi^2 R^3/\gamma T^2)(1 + T/\tau)^2 = 6 \cdot 10^{24}$ kg, où T est la période de révolution de la Terre autour de son axe.

1.257. $v' = 2\pi R/T + \sqrt{gR} = 7{,}0$ km/s; $w' = g\,(1 + 2\pi r/T\sqrt{gR})^2 = 4{,}9$ m/s². Ici g est l'accélération de la chute libre standard, R, le rayon de la Terre, T, sa période de révolution autour de son axe.

1.258. De 1,27 fois.

1.259. La diminution de l'énergie totale E du satellite pendant le temps dt est $-dE = Fv\,dt$. En représentant E et v en fonction de la distance r entre le satellite et le centre de la Lune, ramenons cette équation à la forme intégrable. Il vient finalement $\tau \approx (m/\alpha \sqrt{gR})(\sqrt{\eta} - 1)$.

1.260. $v_I = 1{,}67$ km/s, $v_{II} = 2{,}37$ km/s.

1.261. $\Delta v = \sqrt{\gamma M/R}\,(1 - \sqrt{2}) = -0{,}70$ km/s, où M et R sont la masse et le rayon de la Lune.

1.262. $\Delta v = \sqrt{gR}\,(\sqrt{2} - 1) = 3{,}27$ km/s, où g est l'accélération de la chute libre standard, R, le rayon de la Terre.

1.263. $r = nR/(1 + \sqrt{\eta}) = 3{,}8 \cdot 10^4$ km.

1.264. $A \approx \gamma m\,(M_T/R_T + M_L/R_L) = 1{,}3 \cdot 10^8$ kJ, où M et R sont respectivement la masse et le rayon de la Terre (T) et de la Lune (L).

1.265. $v = 43{,}5 - (29{,}7 + 0{,}46) = 13{,}3$ km/s.

1.266. $\mathbf{N} = (aB - bA)\,\mathbf{k}$, où $\mathbf{k}$ est le vecteur unité de l'axe des z; $l = |aB - bA|/\sqrt{A^2 + B^2}$.

1.267. $l = |aA - bB|/\sqrt{A^2 + B^2}$.

1.268. $F_{rés} = 2F$. Cette force est parallèle au diagonal AC et son point d'application est situé au milieu du côté BC.

1.269. a) $I = ml^2/3$; b) $I = m\,(a^2 + b^2)/3$.

1.270. a) $I = (\pi/2)\,\rho\, bR^4 = 2{,}8 \cdot 10^{-3}$ kg·m²; b) $I = 3/10\ mR^2$.

1.271. $I = mR^2/4$.

1.272. $I = (37/72)\ mR^2 = 0{,}15$ kg·m².

1.273. $I = (2/3)\ mR^2$.

1.274. a) $\omega = gt/R\,(1 + M/2m)$; b) $T = mg^2t^2/2\,(1 + M/2m)$.

1.275. $\langle N \rangle = Rmg\,[1 - (2 + \eta)\,v/2gt] = 0{,}2$ N·m.

1.276. $\beta = \dfrac{g}{R}\,\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m/2}$; $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{m_1\,(m + 4m_2)}{m_2\,(m + 4m_1)}$.

1.277. $A = -\dfrac{(m_2 - km_1)\,km_1g^2t^2}{m + 2\,(m_1 + m_2)}$.

1.278. $P = 2km\omega^3R^2$.

1.279. $t = 3\omega R/4kg$.

1.280. $\langle \omega \rangle = \omega_0/3$.

1.281. $\beta = 2mgx/Rl\,(M + 2m)$.

1.282. a) $k \geqslant 2/7 \operatorname{tg} \alpha$; b) $T = 5/14\ mg^2t^2 \sin^2 \alpha$.

1.283. a) $T = \dfrac{1}{6}\, mg = 13$ N, $\beta = 2g/3R = 5 \cdot 10^2$ rd/s²; b) $P = 2mg^2t/3$.

1.284. $F_{max} = 3kmg/(2 - 3k)$, $w_{max} = 2kg/(2 - 3k)$.

1.285. a) $w = F\,(\cos \alpha - r/R)/m\,(1 + \beta)$; b) $A = F^2t^2\,(\cos \alpha - r/R)^2/2m\,(1 + \beta)$.

1.286. $T = mg/10$.

1.287. $\mathbf{w} = \mathbf{g}\,(m - M)/(m + M + I/R^2)$.

1.288. a) $\mathbf{w} = \dfrac{\mathbf{F}\,(3m_1 + 2m_2)}{m_1\,(m_1 + m_2)}$; b) $T = \dfrac{F^2t^2\,(3m_1 + 2m_2)}{2m_1\,(m_1 + m_2)}$.

1.289. $w_1 = F/(m_1 + 2m_2/7)$; $w_2 = {}^2/_7 w_1$.

1.290. a) $t = \omega_0R/3kg$; b) $A = -m\omega_0^2R^2/6$.

1.291. $\omega = \sqrt{10g\,(R + r)/17r^2}$.

1.292. $v_0 = \sqrt{(7 \cos \alpha - 4)\, gR/3} = 1{,}0$ m/s.

1.293. $v_0 = \sqrt{34\ gR/5}$.

1.294. $T = mv^2$.

1.295. $T = {}^7/_{10} mv^2\,(1 + 2r^2/7R^2)$.

1.297. $N = (m\omega^2l^2/24) \sin 2\vartheta$.

1.298. $\cos \vartheta = 3g/2\omega^2l$.

1.299. $v' = \omega_0 l/\sqrt{1 + 3m/M}$.

1.300. $F = 9p^2/2ml = 9$ N.

1.301. a) $\mathbf{v}' = \dfrac{3m-4M}{3m+4M}\mathbf{v}$; b) $F = \dfrac{8Mv^2}{l(1+4M/3m)^2}$.

1.302. a) $v \approx (M/m)\sqrt{2gl/3}\sin(\alpha/2)$; b) $\Delta p \approx M\sqrt{gl/6}\sin(\alpha/2)$; c) $x \approx$ $\approx 2l/3$.

1.303. a) $\omega = (1+2m/M)\omega_0$; b) $A = (1+2m/M)m\omega_0^2R^2/2$.

1.304. a) $\varphi = -\dfrac{2m_1}{2m_1+m_2}\varphi'$; b) $N_z = -\dfrac{m_1m_2R}{2m_1+m_2}\dfrac{dv'}{dt}$.

1.305. a) $\omega = \dfrac{I_1\omega_1+I_2\omega_2}{I_1+I_2}$; b) $A = -\dfrac{I_1I_2}{2(I_1+I_2)}(\omega_1-\omega_2)^2$.

1.306. $\mathbf{v}' = \mathbf{v}(4-\eta)/(4+\eta)$; $\omega = 12v/l(4+\eta)$. Pour $\eta = 4$ et $\eta > 4$.

1.307. a) $\omega = mR^2\omega_0/2I$; b) $A = m^2R^4\omega_0^2/8I$.

1.308. a) $A_{90^\circ} = I_0^2\omega_0^2/2(I+I_0)$, $A_{180^\circ} = 2I_0^2\omega_0^2/I$; b) $N = I_0^2\omega_0^2/(I+I_0)$.

1.309. $\omega = \sqrt{2g/l} = 6{,}0$ rd/s; $F = mgl_0/l = 25$ N.

1.310. a) $M = (m\omega l^2/12)\sin\vartheta$, $M_z = M\sin\vartheta$; b) $|\Delta\mathbf{M}| =$ $= (m\omega l^2/12)\sin 2\vartheta$; c) $N = (m\omega^2l^2/24)\sin 2\vartheta$.

1.311. a) $\omega' = mgl/I\omega = 0{,}7$ rd/s; b) $F = m\omega'^2 l\sin\vartheta = 0{,}010$ N, voir la fig. 205.

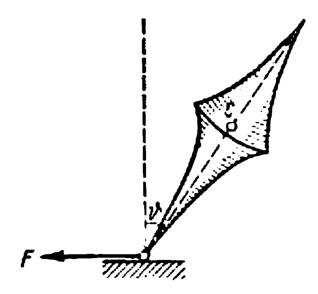


Fig. 205

1.312. $\omega = (g+w)\,l/\pi nR^2 = 3\cdot10^2$ rd/s.

1.313. $\omega' = ml\sqrt{g^2+w^2}/I\omega = 0{,}8$ rd/s. Le vecteur $\boldsymbol{\omega}'$ fait avec la verticale un angle $\vartheta = \operatorname{arc\,tg}(w/g) = 6°$.

1.314. $F' = 2mR^2\omega\omega'/5l = 0{,}30$ kN.

1.315. $N = 2\pi nIv/R = 6$ kN·m.

1.316. $F_{sup} = 2\pi nIv/lR = 1{,}4$ kN. Cette force est à ajouter à la force de pression sur le rail extérieur et à retrancher à celle sur le rail intérieur.

1.317. $p = \alpha E\Delta T = 0{,}22$ GPa, où α est le coefficient de dilatation thermique, E, le module de Young.

1.318. a) $p \approx \sigma_m\Delta r/r = 2$ MPa; b) $p \approx 2\sigma_m\Delta r/r = 4$ MPa. Ici σ_m est la contrainte limite de rupture.

1.319. $n = \sqrt{2\sigma_m/\rho}/\pi l = 0{,}8\cdot10^2$ tr/s, où σ_m est la contrainte limite de rupture.

1.320. $n = \sqrt{\sigma_m/\rho}/2\pi R = 23$ tr/s.

1.321. $x \approx l\sqrt[3]{mg/2\pi d^2E} = 2{,}5$ cm, où E est le module de Young.

1.322. $\varepsilon = F_0/2ES$.

1.323. $T = (1 - r^2/l^2)\,m\omega^2l/2$; $\Delta l = \rho\omega^2l^3/3E$, où ρ est la densité, E, le module de Young.

1.324. $\Delta V = (1 - 2\mu)\, Fl/E = 1{,}6\ \mathrm{mm}^3$, où μ est le coefficient de Poisson, E, le module de Young.

1.325. a) $\Delta l = \rho g l^2/2E$; b) $\Delta V/V = (1 - 2\mu) \times \Delta l/l$. Ici ρ est la densité, E, le module de Young, μ, le coefficient de Poisson.

1.326. a) $\Delta V/V = -3\,(1 - 2\mu)\, p/E$; b) $\beta = 3\,(1 - 2\mu)/E$.

1.327. $R = Eh^2/6\rho g l^2 = 1{,}2\cdot 10^2$ m, où E est le module de Young, ρ, la densité.

1.328. a) Ici N est indépendant de x et égal à N_0. En intégrant deux fois l'équation initiale, compte tenu des conditions aux limites $dy/dx\,(0) = 0$ et $y\,(0) = 0$, on obtient $y = (N_0/2EI)\, x^2$. C'est l'équation d'une parabole. La flèche $\lambda = N_0 l^2/2EI$, où $I = a^4/12$. b) Dans ce cas $N\,(x) = F\,(l - x)$ et $y = (F/2EI)\,(l - x/3)\, x^2$; $\lambda = Fl^3/3EI$, où I est le même qu'au point précédent.

1.329. $\lambda = Fl^3/48\,EI$.

1.330. a) $\lambda = 3\rho g l^4/2Eh^2$; b) $\lambda = 5\rho g l^4/2Eh^2$. Ici ρ est la densité, E, le module de Young.

1.331. $\lambda = 9\beta\rho l^5/5Eh^2$, où ρ est la densité, E, le module de Young.

1.332. a) $\varphi = (l/2\pi r^3 \Delta r G)\cdot N$; b) $\varphi = (2l/\pi r^4 G)\cdot N$.

1.333. $N = \pi\,(d_2^4 - d_1^4)\, G\varphi/32l = 0{,}5$ kN·m.

1.334. $P = \pi r^4 G\varphi\omega/2 = 17$ kW.

1.335. $N = \beta m (r_2^4 - r^4)/2(r_2^2 - r_1^2)$.

1.336. $U = mE\varepsilon^2/2\rho = 0{,}04$ kJ, où ρ est la densité.

1.337. a) $U = \pi r^2 l^3 \rho^2 g^2/6E$; b) $U = 2/3\ \pi r^2 E \times (\Delta l/l)^2$. Ici E est le module de Young.

1.338. $A \approx \pi^2 h \delta^3 E/6l = 0{,}08$ kJ.

1.339. $U = \pi r^4 G\varphi^2/4l = 7$ J.

1.340. $w = G\varphi^2 r^2/2l^2$, G étant le module de cisaillement.

1.341. $w = \beta\,(\rho g h)^2/2 = 23{,}5\ \mathrm{kJ/m^3}$, où β est le coefficient de compressibilité.

1.342. $p_1 > p_2$, $v_1 < v_2$. La densité de lignes de courant croît en passant du point 1 au point 2.

1.343. $Q = S_1 S_2 \sqrt{2g\Delta h/(S_2^2 - S_1^2)}$.

1.344. $Q = S\sqrt{2g\Delta h \rho_0/\rho}$.

1.345. $v = \sqrt{2g\,(h_1 + h_2\rho_2/\rho_1)} = 3$ m/s, où ρ_1 et ρ_2 sont les densités d'eau et de kérosène.

1.346. 25 cm; 50 cm.

1.347. $h = v^2/2g - h_0 = 20$ cm.

1.348. $p = p_a + \rho g h\,(1 - R_1^2/r^2)$, où $R_1 < r < R_2$, p_a la pression atmosphérique.

1.349. $A = \rho V^3/2s^2 t^2$, où ρ est la densité.

1.350. $\tau = \sqrt{2h/g}\, S/s$.

1.351. $v = \omega h \sqrt{2l/h - 1}$.

1.353. $F = 2\rho g S\,\Delta h = 0{,}50\ N$.

1.354. $F = \rho g b l\,(2h - l) = 5\ N$.

1.355. $N = \rho l Q^2/\pi r^2 = 0{,}7\ N\cdot m$.

1.356. $F = \rho g h\,(S - s)^2/S = 6$N.

1.357. a) Le paraboloïde de révolution: $z = (\omega^2/2g)\, r^2$, où z est la cote sur l'axe du récipient à partir de la surface du liquide, r, la distance de l'axe de rotation; b) $p = p_0 + \rho\omega^2 r^2/2$.

1.358. $P = \pi\eta\omega^2 R^4/h = 9$ W.

1.359. $v = v_0 \cdot \dfrac{\ln (r/R_2)}{\ln (R_1/R_2)}$.

1.360. a) $\omega = \omega_2 \dfrac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(\dfrac{1}{R_1^2} - \dfrac{1}{r^2}\right)$; b) $N = 4\pi\eta\omega_2 \dfrac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$.

1.361. a) $Q = \pi v_0 R^2/2$; b) $T = \pi l R^2 \rho v_0^2/6$; c) $F = 4\pi\eta l v_0$; d) $\Delta p = 4\eta l v_0/R^2$.

1.362. A l'extrémité gauche une charge supplémentaire $\Delta h = 5$ cm communique une énergie cinétique au liquide entrant dans le tube. De $\rho v^2/2 = \rho g \Delta h$ il vient: $v = \sqrt{2g\Delta h} = 1{,}0$ m/s.

1.363. Le rapport recherché est égal à $e^{\alpha \Delta x} = 5$.

1.364. $v_2 = v_1 r_1 \rho_1 \eta_2 / r_2 \rho_2 \eta_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ cm/s.

1.365. $d = \sqrt[3]{18 \, \mathrm{Re} \, \eta^2/(\rho - \rho_0) \rho_0 g} = 5$ mm, où ρ_0 et ρ sont les densités de glycérine et de plomb.

1.366. $t = -(\rho d^2/18\eta) \ln n = 0{,}20$ s.

1.367. a) Voir la fig. 206; b) $(\dot{x}/a\omega)^2 + (x/a)^2 = 1$ et $\ddot{x} = -\omega^2 x$.

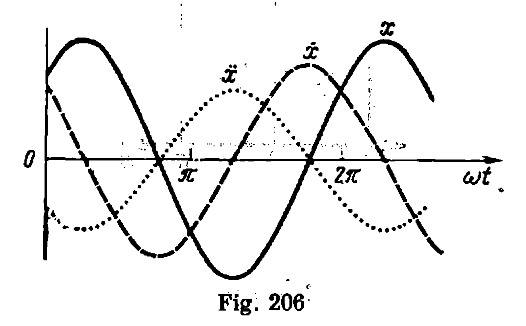


Fig. 206

1.368. a) L'amplitude est égale à $a/2$, la période à $T = \pi/\omega$, voir la fig. 207,a; b) $\dot{x}^2 = 4\omega^2 x (a - x)$, voir la fig. 207, b.

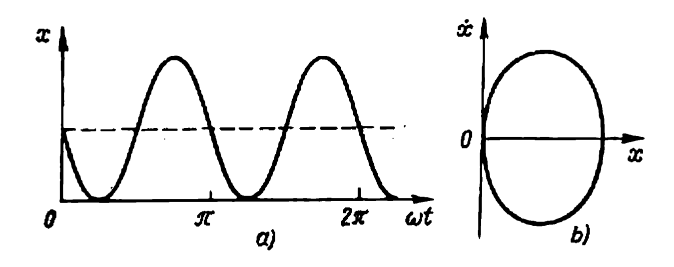


Fig. 207

1.369. $x = a \cos(\omega t + \alpha) = -29$ cm, $\dot{x} = -81$ cm/s, où $a = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/\omega)^2}$, $\alpha = \mathrm{arc\,tg}\,(-\dot{x}_0/\omega x_0)$.

1.370. $\omega = \sqrt{(v_1^2 - v_2^2)/(x_2^2 - x_1^2)}$, $a = \sqrt{(v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2)/(v_1^2 - v_2^2)}$.

1.371. a) $\langle v \rangle = 3a/T = 0{,}50$ m/s; b) $\langle v \rangle = 6a/T = 1{,}0$ m/s.

1.372. a) $\langle \dot{x} \rangle = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\pi} a\omega$; b) $|\langle \mathbf{v} \rangle| = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\pi} a\omega$; c) $\langle v \rangle = \dfrac{2(4 - \sqrt{2})}{3\pi} a\omega$.

1.373. $s = \begin{cases} a\,[n + 1 - \cos(\omega t - n\pi/2)], & n \text{ paire.} \\ a\,[n + \sin(\omega t - n\pi/2)], & n \text{ impaire.} \end{cases}$ Ici n est l'entier du rapport $2\omega t/\pi$.

1.374. 0,6 m.

1.375. $dw/dx = 1/\sqrt{a^2 - x^2}$. Voir la fig. 208.

1.376. Dans les deux cas $a = 7$.
1.377. $v_{max} = 2{,}73a\omega$.
1.378. 47,9 et 52,1 rd/s; 1,5 s.
1.379. 18 ou 26 Hz.
1.380. a) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, dans le sens des aiguilles d'une montre; b) $\mathbf{w} = -\omega^2\mathbf{r}$.

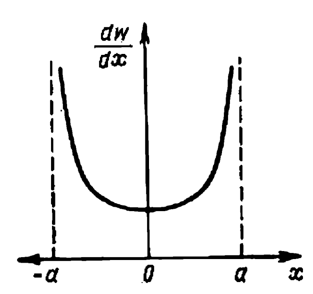
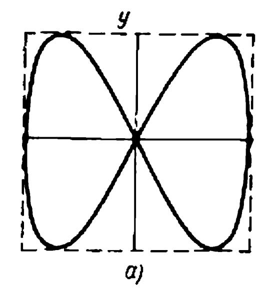


Fig. 208

1.381. a) $y^2 = 4x^2(1 - x^2/a^2)$; b) $y = a(1 - 2x^2/a^2)$. Voir la fig. 209.



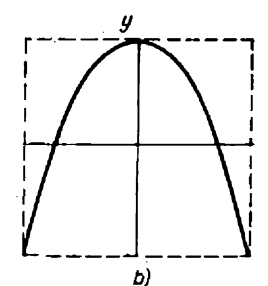


Fig. 209

1.382. $T = \pi\sqrt{ml/F} - 0{,}2$ s.

1.383. $T = 2\pi\sqrt{\eta l/g(\eta - 1)} = 1{,}1$ s.

1.384. $T = (2/r)\sqrt{\pi m/\rho g} = 2{,}5$ s.

1.385. a) $T = 2\pi\sqrt{m/k}$; b) $T = 2\pi\sqrt{m/(k_1+k_2)}$; c) $T = 2\pi\sqrt{m/k'}$, où $k' = k_1k_2/(k_1+k_2)$.

1.386. $\omega = \sqrt{k/(M+m/3)}$.

1.387. $T = 2\pi\sqrt{m/S\rho g(1+\cos\vartheta)} = 0{,}8$ s.

1.388. $T = \pi\sqrt{2l/kg} = 1{,}5$ s.

1.389. a) $\ddot{x} + (g/R)x = 0$, où x est le déplacement du corps par rapport au centre de la Terre, R, le rayon de celle-ci, g, l'accélération de la chute libre standard; b) $\tau = \pi\sqrt{R/g} = 42$ mn; c) $v = \sqrt{gR} = 7{,}9$ km/s.

1.390. $T = 2\pi\sqrt{l/|\mathbf{g}-\mathbf{w}|} = 0{,}8$ s, où $|\mathbf{g}-\mathbf{w}| = \sqrt{g^2+w^2-2gw\cos\beta}$.

1.391. $T = 2\pi/\sqrt{k/m-\omega^2} = 0{,}7$ s; $\omega > \sqrt{k/m} = 10$ rd/s.

1.392. $k = 4\pi^2 a/gT^2 = 0{,}4$.

1.393. a) $\vartheta = 3{,}0° \cos 3{,}5t$; b) $\vartheta = 4{,}5° \sin 3{,}5t$; c) $\vartheta = 5{,}4° \cos(3{,}5t + 1{,}0)$. Ici t est en secondes.

1.394. $F = (m_1 + m_2)g \pm m_1 a\omega^2 = 60$ et 40 N.

1.395. a) $F = mg\,(1 + 0{,}5 \cos \omega t)$, voir la fig. 210; b) $a_{\min} = g/\omega^2 = 8$ cm; c) $a = \left(\omega\sqrt{2h/g} - 1\right) g/\omega^2 = 20$ cm.

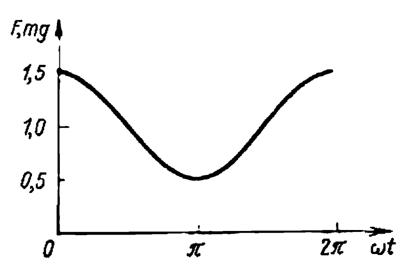


Fig. 210

1.396. a) $y = (mg/k)\,(1 - \cos \omega t)$, où $\omega = \sqrt{k/m}$; b) $T_{\max} = 2mg$, $T_{\min} = 0$.

1.397. $(x/r_0)^2 + \alpha\,(y/v_0)^2 = 1$.

1.398. a) $y = (w/\omega^2)\,(1 - \cos \omega t)$; b) $y = (\alpha/\omega^3)\,(\omega t - \sin \omega t)$. Ici $\omega = \sqrt{k/m}$.

1.399. $\Delta h_{\max} = mg/k = 10$ cm; $E = m^2g^2/2k = 4{,}8$ mJ.

1.400. $a = (mg/k)\sqrt{1 + 2hk/mg}$; $E = mgh + m^2g^2/2k$.

1.401. $a = (mg/k)\sqrt{1 + 2hk/(m+M)\,g}$.

1.402. Ecrivons les équations du mouvement en projections sur les axes des x et des y:

$$\ddot{x} = \omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega\dot{x}, \text{ où } \omega = a/m.$$

Une fois intégrées (compte tenu des conditions initiales), elles donnent: $x = (v_0/\omega)\,(1 - \cos \omega t)$, $y = (v_0/\omega) \sin \omega t$. D'où $(x - v_0/\omega)^2 + y^2 = (v_0/\omega)^2$. C'est l'équation d'une circonférence de rayon v_0/ω centrée sur le point $x_0 = v_0/\omega$, $y_0 = 0$.

1.403. Augmente de $\sqrt{1 + 2R^2/5l^2}$ fois.

1.404. $\omega = \sqrt{(3g/2l)\,(1 + 3kl/mg)}$.

1.405. a) $T = 2\pi\sqrt{l/3g} = 1{,}1$ s; b) $E = mgl\alpha^2/2 = 0{,}05$ J.

1.406. $\varphi_m = \varphi_0\sqrt{1 + mR^2\dot{\varphi}_0^2/2k\varphi_0^2}$; $E = k\varphi_m^2/2$.

1.407. $\langle E_c \rangle = mgl\vartheta_0^2/8 = ml^2\dot{\vartheta}_0^2/12$.

1.408. $T = 4\pi/\omega$.

1.409. $I = ml^2 \dfrac{\omega_2^2 - g/l}{\omega_1^2 - \omega_2^2} = 8 \cdot 10^{-4}$ kg·m².

1.410. $\omega = \sqrt{(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2)/(I_1 + I_2)}$.

1.411. $x = l/2\sqrt{3}$, $T_{\min} = 2\pi\sqrt{l/g\sqrt{3}}$.

1.412. $T = \pi\sqrt{2h/g}$, $l_{\lim} = h/2$.

1.413. $\omega_0 = \sqrt{3a\omega^2/2l}$.

1.414. $\omega = \sqrt{k/(m + I/R^2)}$.

1.415. $T=2\pi\sqrt{3(R-r)/2g}$.

1.416. $T=\pi\sqrt{3m/2k}$.

1.417. a) $\omega=\sqrt{k/\mu}=6$ rd/s ; b) $E=\mu v_1^2/2=5$ mJ, $a=v_1/\omega=2$ cm. Ici $\mu=$ $=m_1m_2/(m_1+m_2)$.

1.418. $T=2\pi\sqrt{I'/k}$, où $I'=I_1I_2/(I_1+I_2)$.

1.419. $\omega_2/\omega_1=\sqrt{1+2m_O/m_C}\approx 1{,}9$, où m_O et m_C sont les masses des atomes d'oxygène et de carbone.

1.420. a) a_0 et $a_0\omega$; b) $t_n=[\text{arc tg}(\omega/\beta)+n\pi]/\omega$, où $n=0, 1, 2, \ldots$

1.421. La réponse dépend de la signification attribuée à la question traitée. La première vibration s'amortit plus vite avec le temps. Au contraire, si l'on rapporte chaque vibration à son échelle naturelle de temps, période T, alors c'est la seconde vibration qui s'amortit plus vite dans cette échelle.

1.422. $\vartheta=\vartheta_m e^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha)$, où $\vartheta_m=\sqrt{\vartheta_0^2+(\dot{\vartheta}_0+\beta\vartheta_0)^2/\omega^2}$, $\alpha=$ $=\text{arc}\cos(\vartheta_0/\vartheta_m)$.

1.423. $\lambda=n\lambda_0/\sqrt{1+(1-n^2)(\lambda_0/2\pi)^2}=3{,}3$; $n'=\sqrt{1+(2\pi/\lambda_0)^2}=4{,}3$ fois.

1.424. $s=a(1+e^{-\lambda/2})/(1-e^{-\lambda/2})=2$ m.

1.425. $\lambda=2\pi/\sqrt{4\pi\tau^2/l\ln^2 n-1}=0{,}025$.

1.426. $T=\sqrt{(3R/2g)(4\pi^2+\lambda^2)}=0{,}9$ s.

1.427. $\omega=\sqrt{2\alpha/m-(\pi\eta R^3/m)^2}$.

1.428. a) $T=2\pi\sqrt{m/\varkappa}=0{,}28$ s ; b) $N=(x_0-\Delta)/4\Delta=3{,}5$ vibrations, où $\Delta=kmg/\varkappa$.

1.429. $x=\dfrac{F_0/m}{\omega^2-\omega_0^2}(\cos\omega_0 t-\cos\omega t)$.

1.430. Equations du mouvement et leurs solutions:

$$t\leqslant\tau,\quad \ddot{x}+\omega_0^2x=F/m,\quad x=(1-\cos\omega_0 t)F/k,$$

$$t\geqslant\tau,\quad \ddot{x}+\omega_0^2x=0,\qquad x=a\cos[\omega_0(t-\tau)+\alpha],$$

où a et α sont des constantes arbitraires. A partir de la condition de la continuité des x et $\dot{x}$ à l'instant $t=\tau$ on obtient l'amplitude inconnue:

$$a=(2F/k)\,|\sin(\omega_0\tau/2)|.$$

1.431. $\omega_{\text{rés}}=\sqrt{\dfrac{1-(\lambda/2\pi)^2}{(1+(\lambda/2\pi)^2}\dfrac{g}{\Delta l}}$, $a_{\text{rés}}=\dfrac{\lambda F_0\Delta\lambda}{4\pi mg}\left(1+\dfrac{4\pi^2}{\lambda^2}\right)$.

1.432. $\omega_{\text{rés}}=\sqrt{(\omega_1^2+\omega_2^2)/2}=5{,}1\cdot 10^2$ rd/s.

1.433. a) $\omega_0=\sqrt{\omega_1\omega_2}$; b) $\beta=|\omega_2-\omega_1|/2\sqrt{3}$, $\omega=\sqrt{\omega_1\omega_2-(\omega_2-\omega_1)^2/12}$.

1.434. $\eta=(1+\lambda^2/4\pi^2)\pi/\lambda=2{,}1$.

1.435. $A=\pi aF_0\sin\alpha$.

1.436. a) $\lambda=2\pi/\sqrt{[2\omega\omega_0/(\omega^2-\omega_0^2)]^2-1}=1{,}45$; b) $A=\pi ma^2(\omega_0^2-\omega^2)=$ $=6$ mJ. Ici $\omega_0=\sqrt{k/m}$.

1.437. a) $\langle P\rangle=\dfrac{F_0^2\beta\omega^2/m}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}$; b) $\omega=\omega_0$, $\langle P\rangle_{\max}=F_0^2/4\beta m$.

1.438. $(\langle P\rangle_{\max}-\langle P\rangle)/\langle P\rangle_{\max}=100/(\eta^2-1)$ %.

1.439. $\tau=2l/\alpha(\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2})$.

1.440. a) $a/\lambda = 5{,}1\cdot10^{-5}$; b) $v_m = 11$ cm/s; $3{,}2\cdot10^{-4}$; c) $(\partial\xi/\partial x)_m = 3{,}2\cdot10^{-4}$; $(\partial\xi/\partial t)_m = v\,(\partial\xi/\partial x)_m$, où $v = 0{,}34$ km/s est la célérité de l'onde.

1.441. Voir la fig. 211.

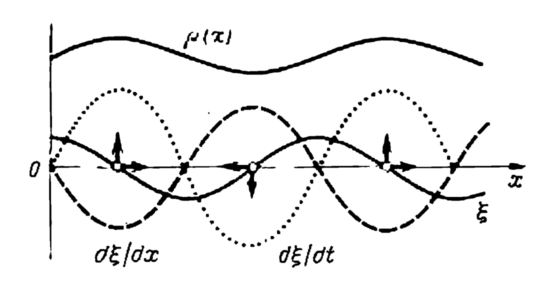


Fig. 211

1.442. $\Delta\varphi = -(2\pi/\gamma\lambda)\ln(1-\eta) \approx 2\pi\eta/\gamma\lambda = 0{,}3$ rd.

1.443. a) $\gamma = \dfrac{\ln(\eta r_0/r)}{r-r_0} = 0{,}8\cdot10^{-3}$ cm^{-1}; b) $v_m = 2\pi\nu a_0/\eta = 15$ cm/s.

1.444. a) Voir la fig. 212,a. Les particules matérielles en des points sur les droites pleines ($y = x \pm n\lambda$, $n = 0, 1, 2, \ldots$) vibrent avec l'amplitude maximale, sur les droites en pointillé ne vibrent point.

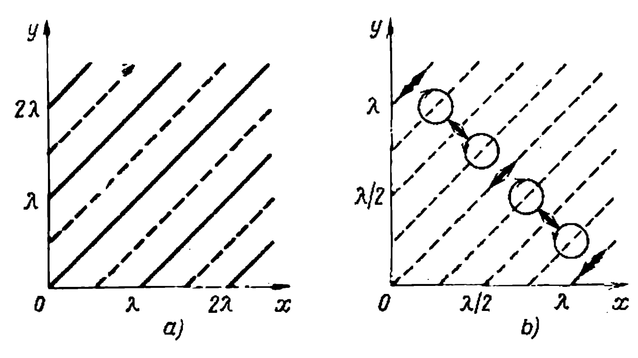


Fig. 212

b) Voir la fig. 212,b. Les particules matérielles en des points sur les droites $y = x \pm n\lambda$, $y = x \pm (n \pm 1/2)\,\lambda$ et $y = x \pm (n \pm 1/4)\,\lambda$ vibrent respectivement: le long de ces droites, perpendiculairement à elles et décrivent les circonférences (ici $n = 0, 1, 2, \ldots$). En d'autres points les particules décrivent des ellipses.

1.445. $\langle w\rangle = 2w_0/3$.

1.446. 1) $\xi = \dfrac{a_0 e^{-\gamma r}}{\sqrt{r}}\cos(\omega t - kr)$; 2) $I_1/I_2 = (r_2/r_1)\,e^{2\gamma(r_2-r_1)} = 27$.

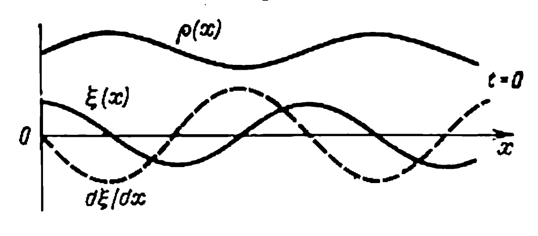
1.447. $\langle\Phi\rangle = 2\pi l^2 I_0\,[1 - 1/\sqrt{1+(R/l)^2}] = 20$ µW.

1.448. $\langle\Phi\rangle = P/\sqrt{1+(2R/h)^2} = 0{,}07$ W.

1.449. Pour a) et b) voir la fig. 213; pour c) voir la fig. 214.

1.450. a) $w_p = (\rho a^2\omega^2/2)\sin^2 kx\cdot\cos^2 \omega t$; b) $w_c = (\rho a^2\omega^2/2)\cos^2 kx \times$ $\times \sin^2 \omega t$. Voir la fig. 215.

1.451. 5 mm; troisième harmonique.



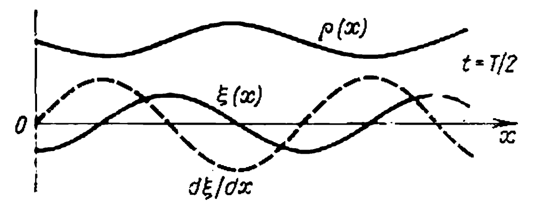


Fig. 213

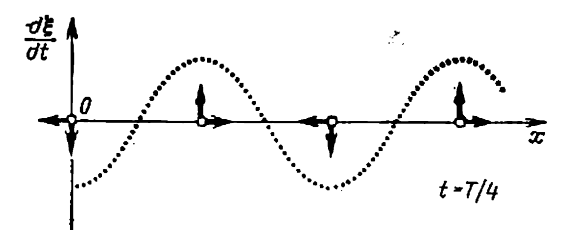


Fig. 214

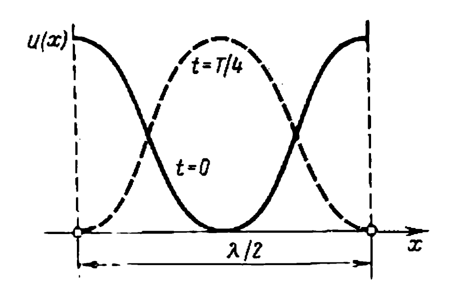


Fig. 215

1.452. a) $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{\eta_2(1+\eta_1)}{\eta_1(1+\eta_2)}} = 1{,}4$; b) augmente de $n = \frac{\sqrt{1-\Delta T/T}}{1-\Delta l/l} =$ $=2$ fois.

1.453. $v = 2l\nu_0 = 0{,}34$ km/s.

1.454. a) $\nu_n = (2n+1)\,v/4l$, six vibrations; b) $\nu_n = (n+1)\,v/2l$, également six vibrations. Ici $n = 0, 1, 2, \ldots$

1.455. $\nu_n = \sqrt{E/\rho}\,(2n+1)/2l = 3{,}8\,(2n+1)$ kHz; quatre vibrations: 26,6; 34,2; 41,8 et 49,4 kHz.

1.456. a) $E_{c\,max} = ma_m^2\omega^2/4$; b) $\langle E_c \rangle = ma_m^2\omega^2/8$.

1.457. $E = \pi S \rho a^2 \omega^2/4k$.

1.458. $\nu_{bat} = 2\nu_0 vu/(v^2 - u^2) \approx 2\nu_0 u/v = 1{,}0$ Hz.

1.459. $u \approx v\nu/2\nu_0 = 0{,}5$ m/s.

1.460. $\omega = (\nu_0 v/a\Delta\nu)\,[\sqrt{1+(\Delta\nu/\nu_0)^2} - 1] = 34$ rd/s.

1.461. $\nu = \nu_0 \sqrt{1+2\,wt/v} = 1{,}35$ kHz.

1.462. a) $\nu = \nu_0/(1-\eta^2) = 5$ kHz ; b) $r = l\sqrt{1+\eta^2} = 0{,}32$ km.

1.463. $\nu_{bat} = 2\nu_0 u/(v+u) = 0{,}60$ Hz.

1.464. $\gamma = \dfrac{\ln(\eta r_1^2/r_2^2)}{2(r_2 - r_1)} = 6$ km^{-1}.

1.465. a) $L' = L + 10 \log e^{-2\gamma x} = 50$ dB; b) 0,30 km.

1.466. a) $L = L_0 + 20 \log (r_0/r) = 36$ dB; b) $r > 0{,}63$ km.

1.467. $\beta = (\ln n)/\tau = 0{,}07$ s^{-1}.

1.468. a) Considérons le mouvement d'un élément plan du milieu d'épaisseur dx de section droite unité. Conformément à la deuxième loi de Newton on a $\rho\, dx \cdot \ddot{\xi} = -dp$, où dp est l'accroissement de pression sur la longueur dx. Comme $\ddot{\xi} = v^2 (\partial^2\xi/\partial x^2)$ (l'équation de l'onde), on peut récrire l'égalité précédente sous la forme

$$\rho v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\, dx = -dp.$$

En intégrant cette équation, on obtient

$$\Delta p = -\rho v^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \text{const}.$$

En l'absence de la déformation (de l'onde) la pression supplémentaire $\Delta p = 0$ D'où const $= 0$.

1.469. $\langle \Phi \rangle = \pi R^2 (\Delta p)_m^2/2\rho v\lambda = 11$ mW.

1.470. a) $(\Delta p)_m = \sqrt{\rho v P/2\pi r^2} = 5$ Pa ; $(\Delta p)_m/p = 5 \cdot 10^{-5}$; b) $a = (\Delta p)_m/2\pi\nu\rho v = 0{,}003$ mm ; $a/\lambda = 5 \cdot 10^{-6}$.

1.471. $P = 4\pi r^2 e^{2\gamma r} I_0 \cdot 10^{L/10} = 1{,}4$ W.

Partie 2

Physique moléculaire et thermodynamique

2.1. $n = 5 \cdot 10^5$ cm^{-3}; $\rho = 2{,}3 \cdot 10^{-11}$ g/cm^3.

2.2. $p = 0{,}25$ kPa ; $M_r = \dfrac{M_{r1}N_1 + M_{r2}N_2}{N_1 + N_2} = 41$.

2.3. $n = 7 \cdot 10^{18}$ cm^{-3}.

2.4. a) $p = 2mnv^2 \cos^2 \vartheta$; b) $p = 2mn\,(v \cos\vartheta \pm u)^2$, les signes plus ou moins dépendant du sens du mouvement de la paroi.

2.5. $\langle v \rangle_q = 4{,}78 \cdot 10^2$ m/s; $\langle \varepsilon \rangle = 6{,}1 \cdot 10^{-21}$ J.

2.6. a) 1,34; b) 1,46.

2.7. $\langle \varepsilon \rangle_{trans} = 9{,}32 \cdot 10^{-20}$ J ; $\langle \varepsilon \rangle_{rot} = \langle \varepsilon \rangle_{vibr} = 6{,}21 \cdot 10^{-20}$ J.

2.8. $\omega = \sqrt{2RT/Md^2} = 3{,}6 \cdot 10^{11}$ rd/s.

2.9. $E = 74$ J ; $E_{trans} = E/2 = 37$ J.

2.10. $n_{vibr} = 3N - 6$; $\langle \varepsilon \rangle = (3N - 3)\,kT$ ou $n_{vibr} = 3N - 5$; $\langle \varepsilon \rangle = (3N - 2{,}5)\,kT$ (pour les molécules linéaires).

2.11. a) $C_V = 3{,}5R$; $\gamma = 1{,}29$; b) $C_V = 6{,}5R$; $\gamma = 1{,}15$; c) $C_V = 9R$; $\gamma = 1{,}11$.

2.12. $\langle\varepsilon\rangle_{\text{trans}} = \frac{3}{2} kT + \frac{3Mv^2}{2iN_A} = 5{,}8\cdot10^{-21}$ J*).

2.13. $M_r = 32$ (O_2); $n = 5$.

2.14. $c_V = 0{,}85\ c_V\ (O_2) + 0{,}15\ c_V\ (O_3) = 0{,}63$ kJ/(kg·K). $c_p = 0{,}85\ c_p\ (O_2) + 0{,}15\ c_p\ (O_3) = 0{,}88$ kJ/(kg·K).

2.15. $p = \frac{m}{M}\frac{RT}{V}(1+\alpha) = 91$ kPa (M est la masse molaire de H_2); $c_V = (7-\alpha)\,R/2M = 14{,}0$ kJ/(kg·K).

2.16. $T = \frac{z_1 i_1 T_1 + z_2 i_2 T_2}{z_1 i_1 + z_2 i_2}$; $p = \frac{z_1 + z_2}{V_1 + V_2} RT$*).

2.17. $p = p\cdot e^{-(C/V)t}$. La pression voisine de celle limite que peut assurer la pompe, diminue beaucoup plus lentement qu'il n'en découle de la loi obtenue.

2.18. 2,0 mn.

2.19. $\tau = \frac{V}{C}\ln\left(\frac{p_0 - p_{\text{lim}}}{p - p_{\text{lim}}}\right) = 16$ mn.

2.20. a) $C' = 19$ l/s; b) $\tau = 9$ mn; c) de 2,6 fois.

Solution. Le processus étant stationnaire, la masse de gaz s'écoulant par unité de temps du volume où l'on fait le vide est égale à la masse de gaz traversant la conduite à vide et égale à la masse de gaz évacué par la pompe au bout du même temps:

$$\frac{M}{RT}\,p\,\frac{dV'}{dt} = \frac{1}{W}\sqrt{\frac{M}{RT}}\,(p - p_1) = \frac{M}{RT}\,p_1 C,$$

où p est la pression dans le volume évacué, p_1, la pression à l'extrémité de la conduite à vide reliée à la pompe. Il découle de cette relation que

$$C' = \frac{dV'}{dt} = \frac{C}{1 + CW\sqrt{M/RT}}.$$

La pression dans le volume évacué variera selon la loi $p = p_0 e^{-(C'/V)t}$.

2.21. a) 0,20 %; b) $5{,}5\cdot10^{-8}$ %.

2.22. $n = 2{,}5\cdot10^{14}$ cm^{-3}.

2.23. a) $2{,}8\cdot10^{21}$; b) $1{,}4\cdot10^{20}$.

2.24. a) 0,83 %; b) 0,90 %; c) 0,93 %.

2.25. a) 2,50; b) 1,72; c) 0,052.

2.26. $v = \sqrt{1{,}5\ln 2}\,v_{\text{prob}\,2} = 1{,}02 v_{\text{prob}\,2}$, où $v_{\text{prob}\,2} = \sqrt{2RT_2/M}$.

2.27. 0,93%.

2.28. $\nu = {}^1/_4 n\langle v\rangle$, où $\langle v\rangle = \sqrt{8RT/\pi M}$.

2.29. $\langle v_x\rangle = 0$; $\langle|v_x|\rangle = \sqrt{2RT/\pi M}$.

2.30. a) 29 kPa; b) 350 kPa.

2.31. a) $h = 5{,}5$ km; b) $h = RT/Mg = 8{,}0$ km.

2.32. $h = 78$ m.

2.33. $m = (p_0 S/g)(1 - e^{-Mgh/RT})$.

2.34. $h_c = \int_0^\infty h\,dm \Big/ \int_0^\infty dm = RT/Mg$ (voir le problème 2.31).

Indication. $\int_0^\infty z e^{-z}\,dz = 1$.

---

*) Ici $i = n_{\text{trans}} + n_{\text{rot}} + 2n_{\text{vibr}}$ (n_{trans}, n_{rot}, n_{vibr} sont les nombres de degrés de liberté de translation, de rotation et de vibration d'une molécule).

2.35. $C = \gamma R p_0 s/(\gamma - 1)\, Mg$, où $\gamma = C_p/C_V$.

I n d i c a t i o n. Utiliser les réponses des problèmes 2.33 et 2.34.

2.36. a) $n = n_0 e^{m\omega^2 r^2/2kT}$, où $n_0 = p_0/kT$; b) $f = p_0 S\,(e^{m\omega^2 l^2/2kT} - 1)$.

2.37. $\Delta n/n = e^{-3/2} = 22{,}3\ \%$.

2.38. a) $\sim 10^{-19}\ \%$; b) $\sim 10^{-292}\ \%$.

I n d i c a t i o n. Lorsque $\varepsilon \gg kT$, la distribution de Maxwell par énergies cinétiques peut se présenter sous la forme $dn \approx A n e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon$, où $A = (2/\sqrt{\pi})\sqrt{\varepsilon_0}/(kT)^{3/2})$ ε_0 est la valeur donnée de l'énergie).

2.39. $p = p_0\,(1 - \beta h)^{Mg/\beta R T_0}$, $\rho = (M p_0/R T_0)\,(1 - \beta h)^{Mg/\beta R T_0 - 1}$ $\left(h < \dfrac{1}{\beta}\right)$.

2.40. a) $\lambda \sim 10^{-5}$ cm, $\tau \sim 10^{-10}$ s; b) $\lambda \sim 10^{25}$ m, $\tau \sim 10^{16}$ s $\sim 10^{9}$ ans.

2.41. $\lambda = 4\cdot 10$ m, $\tau = 8\cdot 10^{-2}$ s.

2.42. $2\cdot 10^{29}$ cm^{-3} s^{-1}.

2.43. $N = 6{,}9\cdot 10^{21}$; $z = 2{,}3\cdot 10^{30}$ s^{-1}.

2.44. $p \sim 1$ Pa.

2.45. a) $\lambda = \text{const}$, $z \sim \sqrt{p}$; b) $\lambda \sim 1/p$, $z \sim p$; c) $\lambda \sim p^{-1/\gamma}$, $z \sim p^{(\gamma+1)/2\gamma}$, où $\gamma = C_p/C_V$.

2.46. a) $\lambda = \text{const}$, $z \sim \sqrt{T}$; b) $\lambda \sim T$, $z \sim 1/\sqrt{T}$; c) $\lambda \sim T^{1/(1-\gamma)}$, $z \sim T^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}$, où $\gamma = C_p/C_V$.

2.47. a) Non; b) $\lambda_{son} \gg \lambda$; c) $\lambda_{son} \sim \lambda$, où λ_{son} est la longueur d'onde sonore, λ, le libre parcours moyen des molécules gazeuses.

2.48 3 %.

2.49. $\tau = (4V/S\,\langle v\rangle)\cdot \ln 2$, où $\langle v\rangle = \sqrt{8RT/\pi M}$.

I n d i c a t i o n. Le nombre de chocs des molécules par seconde sur une surface unité est égal à $(1/4)\, n\,\langle v\rangle$ (voir le problème 2.28).

2.50. $\lambda \sim 10^{2}$ m, $D \sim 10^{7}$ m^2/s.

2.51. $\eta = 5{,}0\cdot 10^{-4}$ Po.

2.52. $\lambda = 5{,}9\cdot 10^{-6}$ cm, $D = 7{,}1\cdot 10^{-6}$ m^2/s.

2.53. $\varkappa$ diminue de 1,15 fois, D augmente de 1,74 fois.

2.54. a) λ diminue de 10 fois, η demeure invariable; b) λ diminue de 5,2 fois, η augmente de 1,39 fois.

2.55. a) $q = \dfrac{ik\,\langle v\rangle}{6\sqrt{2}\,\pi d^2}\,\dfrac{T_2 - T_1}{l} = 20$ W/m^2 ; b) $q = \dfrac{i}{12}\langle v\rangle \dfrac{p}{T}(T_2 - T_1) = 0{,}21$ W/m^2 (dans ce cas $\lambda > l$). Ici $\langle v\rangle = \sqrt{8RT/\pi M}$; $T = (T_1 + T_2)/2$, d est le diamètre efficace d'une molécule; voir également la note à la page 228.

2.56. $q = \dfrac{T_1 - T_2}{l_1/\varkappa_1 + l_2/\varkappa_2}$; $\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_{1,\,2} = \dfrac{q}{\varkappa_{1,\,2}}$.

2.57. $q = (\varkappa_0/l)\ln(T_1/T_2)$; $T(x) = T_1\,(T_2/T_1)^{x/l}$.

2.58. $\varkappa = q/4\pi a$; $dT/dr = -a/r^2$; $T = T_1 - a\,(1/r_1 - 1/r)$, où $a = (T_1 - T_2)\, r_1 r_2/(r_2 - r_1)$.

2.59. $q = \dfrac{4k}{3d^2}\sqrt{\dfrac{k}{\pi m}}\,\dfrac{T_1^{3/2} - T_2^{3/2}}{\ln(r_2/r_1)}$.

2.60. $N = (\pi\eta a^4/2d)\cdot\omega$.

2.61. $\eta = (4Id/(\pi a^4)\cdot\Lambda/\tau$ (on admet que $\Lambda \approx \beta\tau$, où β est le coefficient d'amortissement des vibrations du disque).

2.62. $\eta = \dfrac{N}{4\pi\omega_0}\,\dfrac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2}$; $\dfrac{d\omega}{dr} = \dfrac{2\omega_0 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\,\dfrac{1}{r^3}$.

I n d i c a t i o n. Voir le problème 1.360.

2.63. La pression résultante sur la plaque mobile est $\Delta p = p_1 - p$, où $p = nkT$ est la pression de gaz dans le récipient, $p_1 = n_1 k T_1 + n_2 k T$, la pression sur la surface de la plaque mobile *2* faisant face à la plaque chauffée *1*. Ici n_1 est le nombre de molécules gazeuses dont la vitesse moyenne $\langle v_1\rangle = \sqrt{8RT_1/\pi M}$ par unité de volume entre les plaques, n_2, le nombre de molécules

dont la vitesse moyenne $\langle v\rangle = \sqrt{8RT/\pi M}$. Etant donné qu'à l'état d'équilibre les molécules ne s'accumulent nulle part, il vient que $n_1 \langle v\rangle_1/4 = n_2 \langle v\rangle/4$ et $n_1 \langle v\rangle_1/4 + n_2 \langle v\rangle/4 = n \langle v\rangle/4$, d'où $n_1/n = (1/2)\sqrt{T/T_1}$, $n_2 = n/2$. La force résultante s'exerçant sur la plaque *2* est $f = 2\Delta pS = pS\left(\sqrt{T_1/T} - 1\right)$. L'angle dont tourne l'équipage mobile se déduit de la condition $K\varphi = rf$, où $r = l/4$. Le coefficient K et la période τ sont reliés, comme on sait, par la formule $\tau = 2\pi\sqrt{I/K}$. Finalement,

$$\varphi = \frac{\tau^2 Sl}{16\pi^2 I}\, p\left(\sqrt{T_1/T} - 1\right).$$

2.64. a) pour adiabatique; b) pour la dilatation à pression constante $\Delta U > 0$, pour celle isotherme $\Delta U = 0$, pour celle adiabatique $\Delta U < 0$.

2.65. a) $Q' = 5{,}4$ J; b) $U = -5{,}4$ J.

2.66. a) $\gamma = 1{,}67$; b) $\Delta U = 0{,}72$ MJ; c) $A = 0{,}48$ MJ.

2.67. a) $A' = (mg + p_0S)\,h - RT \ln[1 + (mg + p_0S)\,h/RT]$; b) $A' = RT\,(1 - \ln 2) = 0{,}31\ RT$.

2.68. $A = mc_V\,(T_1 - T_2)$.

2.69. a) $\Delta U = 52$ kJ; b) $A' = 52$ kJ; c) de 1,8 fois.

2.70. 1) pendant celle adiabatique, de 1,6 fois; 2) à la suite de celle adiabatique, de 2,5 fois.

2.71. $\tau = (2\pi/S)\sqrt{mV/2np_0}$.

2.72. $A' = \dfrac{p_0V_0}{\gamma - 1}\left[2^{\lambda-1} - 2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\gamma-1}\right]$.

2.73. $A' = \dfrac{2p_0V_0}{\gamma - 1}\left[\left(\dfrac{4}{3}\right)^{(\gamma-1)/2} - 1\right]$.

2.74. $v = \sqrt{2\gamma RT/M\,(\gamma - 1)} = 4{,}0$ km/s.

2.75. 1) $v = \sqrt{\dfrac{2\gamma}{\gamma - 1}\dfrac{RT_0}{M}\left[1 - \left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]}$,

$$q = \rho v S = S\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\, p_0\rho_0\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma+1)/\gamma}\right]},$$

où ρ_0 et ρ sont respectivement les densités de gaz dans le réservoir et à la sortie du tube; $\gamma = C_p/C_V$.

I n d i c a t i o n. Il découle de la loi de la conservation de l'énergie que l'écoulement adiabatique stationnaire d'un gaz non visqueux vérifie, le long de toute ligne de courant, la relation

$$v^2/2 + U' + p/\rho + gh = \text{const},$$

où U' est l'énergie interne spécifique, h, la hauteur.

2.76. a) $Q = RT_1/2 = 1{,}25$ MJ. b) $A = RT_1/2 = 1{,}25$ MJ; c) $\Delta U = 0$.

2.77. a) $T_2 = 264$ K; b) $Q' = 1{,}76$ kJ; c) $\Delta U = -1{,}62$ kJ; d) $A = -0{,}14$ kJ.

2.78. $\gamma = 1{,}40$.

2.79. $C = \dfrac{n - \gamma}{n - 1}C_V = \dfrac{n - \gamma}{(\gamma - 1)(n - 1)}R$, où $\gamma = C_p/C_V$; $C < 0$ lorsque $1 < n < \gamma$. Il s'ensuit que $C < 0$ pour toutes les transformations polytropiques passant par l'état initial *1* et contenues entre l'isotherme et l'adiabatique pour le gaz donné (fig. 216).

2.80. a) $n < 1$ (les courbes décrivant la marche de cette transformation se situent dans le domaine *I* de la fig. 217); b) $1 < n < \gamma$ (domaine *II*); c) $n > \gamma$ (domaine *III*); le travail est produit aux dépens de l'énergie interne du gaz.

2.81. a) $n = -1$; b) $\Delta U = 8p_0V_0/(\gamma - 1)$; c) $A = 4p_0V_0$; d) $C = R(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)$.

2.82. a) $C = -R/2$; b) $Q = R\Delta T/2 = 4{,}16$ kJ/kmole; c) $A = 2R\Delta T = 16{,}6$ kJ/kmole.

2.83. a) $n = 1{,}43$; b) $\Delta U = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[\frac{p_2V_2}{p_1V_1} - 1\right] = 0{,}25$ MJ; c) $Q = \frac{n-\gamma}{n-1}\Delta U = 0{,}02$ MJ; d) $A = \frac{p_1V_1}{1-n}\left(\frac{p_2V_2}{p_1V_1} - 1\right) = -0{,}23$ MJ.

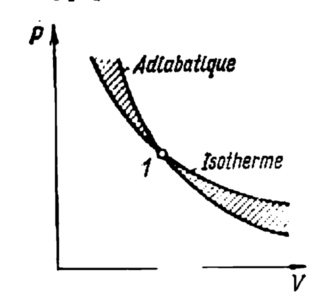


Fig. 216

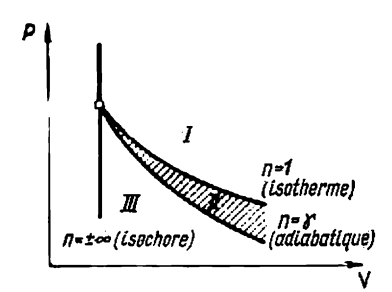


Fig. 217

2.84. a) $A = \alpha \ln 2 - RT_1/(\gamma - 1)$; b) $pV^{\gamma}e^{\alpha(\gamma-1)/pV} = \text{const}$, où $\gamma = C_p/C_V$.

2.85. a) $\eta = 50$ %; b) $Q_1 = (m/M)RT_1(p_1/p_2)\ln(T_2/T_1)^{\gamma/(\gamma-1)} = 2{,}8$ MJ; c) $Q_2' = (1 - \eta)Q_1 = 1{,}4$ MJ; d) $A = 1{,}4$ MJ.

2.86. a) $\varepsilon = 10$; b) $Q_2 = -\varepsilon A = 2{,}0$ MJ; c) $Q_1' = -(1 + \varepsilon)A = 2{,}2$ MJ.

2.87. $A = 50$ kJ; $\eta = (\gamma - 1)/(2\gamma + 1) = 11\%$.

2.88. $\eta = [1 - (V_{min}/V_{max})^{\gamma-1}] = 60$ %.

2.89. 1) $A = (m/M)RT[\ln a - (a-1)/a] = 1{,}28$ MJ; $\eta = \frac{\ln a - (a-1)/a}{\ln a + (a-1)/(\gamma - 1)a} = 13$ %; 2) $\eta/\eta_0 = 0{,}27$.

2.90. a) $\eta = 1 - 2T_3/(T_1 + T_2)$; b) $A = R\ln k\cdot(T_1 + T_2 - 2T_3)$.

2.91. 1) $\eta = 1 - \left(\frac{1}{b}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$; 2) $\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2 + (T_2 - T_1)/(\gamma - 1)\ln a}$; 3) $\eta = 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\ln b}{b^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}$.

2.92. $Q_1 = Z\frac{\gamma}{\gamma - 1}RT_1a^{\gamma-1}(b - 1)$; $\eta = 1 - \frac{b^{\gamma} - 1}{\gamma a^{\gamma-1}(b - 1)}$.

2.93. a) $\Delta S = \Delta S_1 = 26$ kJ/(kmole·K); $\Delta S = \Delta S_2 = \gamma \Delta S_1 =$ $= 35$ KJ/(kmole·K).

2.94. a) $\Delta S = 3{,}1$ J/K; b) $\Delta S = 0{,}91$ J/K.

2.95. $\Delta S_{12} = \Delta S_{132} = (m/M)\, R \ln (V_2/V_1)$.

2.96. $\Delta U = -62{,}4$ kJ; $\Delta S = 234$ J/K.

2.97. $\Delta S = \frac{(n-\gamma)}{(n-1)(\gamma-1)} R \ln (T_2/T_1)$.

2.98. $\Delta S = \frac{m}{M} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} R \ln (V_2/V_1) = 46$ kJ/K.

2.99. a) $\Delta S = -18$ mJ/K; b) $\Delta S = R \ln 2 = 5{,}7$ kJ/(kmole·K); c) $\Delta S = -6{,}7$ J/K.

2.100. Voir la fig. 218.

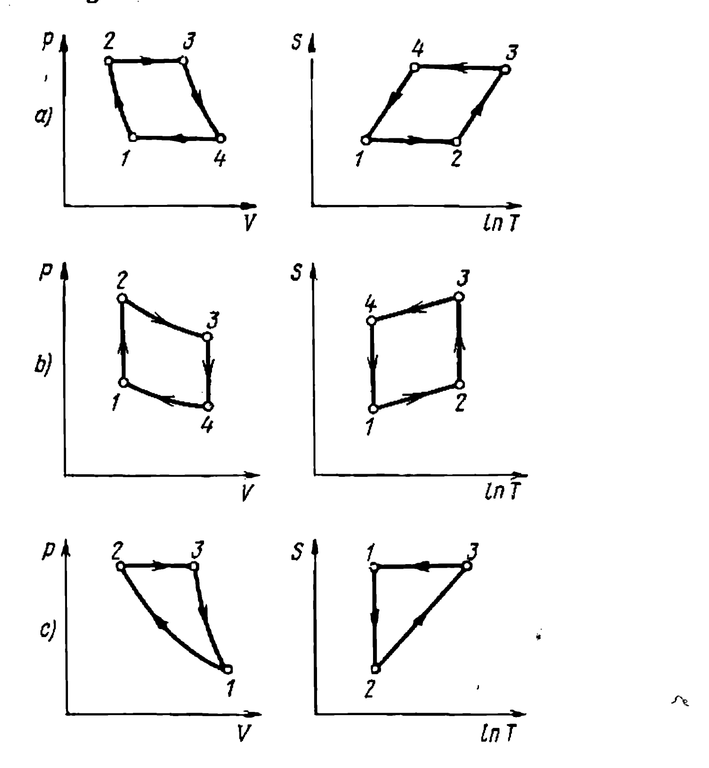


Fig. 218

2.101. $\Delta S = \frac{m_1}{M_1} R \ln \frac{V_2+V_1}{V_1} + \frac{m_2}{M_2} R \ln \frac{V_2+V_1}{V_2} = 6{,}3$ mJ/K.

2.102. $\Delta U = 0$, $\Delta S = (m/M) R \ln 2$.

Indication. La température du gaz parfait étant invariable lors de cette transformation irréversible, il est à considérer, en calculant ΔS, une dilatation isotherme, réversible, de gaz.

2.103. $p_1 = 1{,}25$ MPa; $p_2 = 1{,}3$ MPa.

2.105. $A = RT \ln \frac{V_2-b}{V_1-b} - a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)$.

2.106. a) $Q = 4{,}1$ MJ; b) $\Delta U = 0{,}11$ MJ; c) $A = 4{,}0$ MJ.

2.107. a) $C_V = iR/2$ (voir la note à la page 228); b) $\left(p+\frac{a}{V^2}\right) \times \times (V-b)^{(C_V+R)/C_V} = \text{const}$ ou $T(V-b)^{R/C_V} = \text{const}$; c) $C_p - C_V = \frac{R}{1-2a(V-b)^2/RTV^3}$; au point critique $C_p - C_V = \infty$.

2.108. 1) $4{,}3 \cdot 10^3$ cm³; 2) 21,8 MPa; 3) non.

2.109. $T_{cr} = 304$ K, $\rho_{cr} = 0{,}34$ g/cm³.

2.110. 1) $m = 8/3\,(Mp_{cr}/RT_{cr})\,V = 5{,}2$ g; 2) voir la fig. 219.

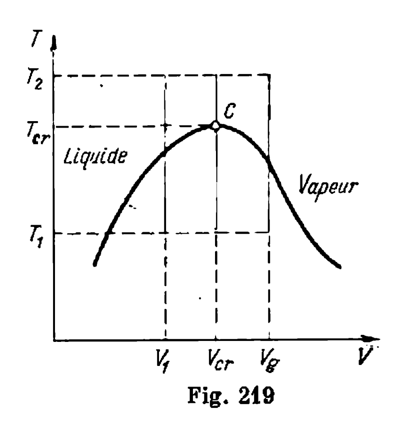


Fig. 219

2.111. $V_{liq}/V = (k-1)/(n-1)$; pour le cas considéré $V_{liq}/V = 1/(n+1)$

2.112. a) $\Delta U = 0$; b) $A_l = a\frac{V_2}{(V_1+V_2)V_1}$; c) $\Delta T = -\frac{a}{C_V}\frac{V_2}{(V_1+V_2)V_1}$.

2.113. 0,7 J.

2.114. $a = (27/64)\,R^2T_{cr}^3/p_{cr}$, $b = V_{cr} - (1/4)\,RT_{cr}/p_{cr}$, $c = (3/8)\,RT_{cr}/p_{cr} - V_{cr}$.

2.116. $\Delta U > 0$ dans les deux cas.

2.117. $S = R \ln[(V_2-b)/(V_1-b)]$.

2.118. Solution. Considérons un cycle isotherme réversible 1—3—4—5—2—4—1 (fig. 220). Les conditions $\Delta S = \Delta U = 0$ et $T = \text{const}$ conduisent à $Q = 0$ et $A = 0$, où Q est la chaleur reçue par cycle, A, le travail effectué par cycle. Sur la portion 1—3—4—5—2 le travail est positif, sur la portion 2—4—1, négatif. Le travail total étant nul, les aires des figures 6—1—3—4—

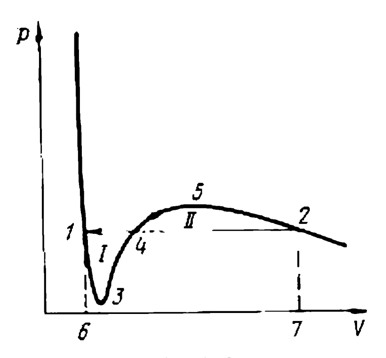


Fig. 220

—5—2—7—6 et 6—1—4—2—7—6 doivent être égales. Il en vient que les aires I et II sont égales.

R e m a r q u e. Les raisonnements ci-dessus ne sont pas valables pour les cycles 1—3—4—1 et 4—5—2—4. Ces cycles sont irréversibles car ils incluent au point 4 le passage irréversible de l'état décrit par l'isotherme de Van der Waals 1—3—4—5—2 à l'état décrit par le segment rectiligne 1—4—2 de l'isotherme réelle.

2.119. $\Delta S > 0$. L'entropie croît, l'étranglement étant une transformation adiabatique irréversible.

2.120. $p_z = p_0 - \frac{2\alpha\cos\vartheta}{r}\frac{z}{h}$, $p_A = p_0 - \frac{2\alpha\cos\vartheta}{r}$, $p_B = p_0$.

2.121. $\Delta h = \frac{2\alpha\,|\cos\vartheta|}{\rho g}\cdot\frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} = 11$ mm, $p = 132$ kPa.

2.122. a) $r = 2\alpha/p_0 = 1{,}3\mu$; b) $r = 8\alpha/(12p_0 + \rho g l) = 0{,}43\mu$.

2.123. $p = 215$ kPa.

2.124. $h = (1/\rho g)\,[p_0(n^3 - 1) + (2\alpha/r)\,n\,(n^2 - 1) = 5{,}6$ m.

2.125. a) $\Delta p = 4\alpha/r = 29$ Pa; b) $F = 8\pi r^2\alpha = 39$ µJ; c) $A = F + (4/3)\,\pi r^3 p_0\,(1 + 4\alpha/rp_0)\ln(1 + 4\alpha/rp_0)$ (p_0 est la pression atmosphérique). Pour $4\alpha/rp_0 \ll 1 A \approx (40/3)\,\pi r^2\alpha = 65$ µJ.

2.126. $h = 2\alpha/\rho g d = 2{,}8$ cm; $f = (2\alpha^2/\rho g d^2)\,l = 0{,}59$ N.

2.127. S'attirent; $f = (2\alpha^2\cos^2\vartheta/\rho g d^2)\,l$.

2.128. $m \approx (n^2 - 1)\,\pi r^2\,(2\alpha/dg)\cdot|\cos\vartheta| = 3{,}0$ kg.

I n d i c a t i o n. Tenir compte de ce que $r \gg d$.

2.129. $f = 0{,}73$ kN.

2.130. $y = [\alpha\cos\vartheta/\mathrm{tg}\,(\varphi/2)\,\rho g]\cdot 1/x$; hyperbole.

2.131. $\Delta F = 4\pi\alpha r^2\,(\sqrt[3]{4} - 2) = -16$ µJ.

2.132. $\Delta F = 2\alpha\Delta\sigma = 16$ µJ; $\Delta S = -(2d\alpha/dT)\cdot\Delta\sigma = 60$ nJ; $\Delta U = 2\,(\alpha - T\,d\alpha/dT)\cdot\Delta\sigma = 34$ µJ.

2.133. 1) 108 kJ/K; 2) 8,6 kJ/K; 3) 0,92 J/K.

2.134. $p_s = Ce^{-M\lambda/RT}$, où C est une constante.

2.135. a) $T_{tr} = 216$ K, $p_{tr} = 0{,}52$ MPa; b) $\lambda_1 = 0{,}57$ MJ/kg, $\lambda_2 = 0{,}78$ MJ/kg, $\lambda_3 = 0{,}21$ MJ/kg.

2.136. $r = 11$ nm; les gouttes de plus petit rayon se vaporisent.

Partie 3

Electricité

3.1. $\frac{f_e}{f_g} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\gamma}\left(\frac{e}{m_e}\right)^2 = 4{,}2\cdot 10^{42}$.

3.2. $m_p' = 1{,}86$ µg $\approx 10^{18} m_p$, où m_p est la masse vraie du proton.

3.3. $w = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2 m_e} = 2{,}5\cdot 10^8$ m/s².

3.4. $f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{6p^2}{l^4} = 2{,}1\cdot 10^{-16}$ N.

3.5. $\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_2}\frac{q_i q_k'}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k'|^3}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k')$.

3.6. $\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\int_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r}')\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\,dV\,dV'$.

3.7. $f = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 b} = 8{,}1$ N/m; $A = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} = 112$ mJ/m.

3.8. $f_e = \frac{eU}{r \ln (b/a)} = 4.9 \cdot 10^{-15}$ N ; $f_m = \frac{pU}{r^2 \ln (b/a)} = 1{,}9 \cdot 10^{-22}$ N.

3.9. a) $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 8} \frac{6q}{a}$, $E=0$; b) $\varphi = 0$, $E = 0$.

3.10. $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}$, $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$.

3.11. $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})\, dV}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$, $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, dV}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$.

3.12. $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{r^2} \cos \vartheta$, $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1+3\cos^2\vartheta}$.

Indication. La « longueur » du dipôle l étant bien inférieure à r, on peut négliger les termes contenant les degrés élevés du rapport l/r. Une fois φ calculé, déterminer E_r radiale ainsi que la composante E_ϑ du champ électrique perpendiculaire à elle.

3.13. 1) $\mathbf{E} = -2(ax\mathbf{e}_x + ay\mathbf{e}_y + bz\mathbf{e}_z)$, $E = 2\sqrt{a^2(x^2+y^2)+b^2z^2}$; 2) un ellipsoïde de révolution de demi-axes : $\sqrt{\varphi/a}$, $\sqrt{\varphi/a}$, $\sqrt{\varphi/b}$; 3) un ellipsoïde de révolution de demi-axes : $E/2a$, $E/2a$, $E/2b$.

3.14. a) $\mathbf{E} = -2(ax\mathbf{e}_x + ay\mathbf{e}_y - bz\mathbf{e}_z)$, $E = 2\sqrt{a^2(x^2+y^2)+b^2z^2}$; b) pour $\varphi > 0$ un hyperboloïde de révolution à une nappe, pour $\varphi = 0$ un cône circulaire droit, pour $\varphi < 0$ un hyperboloïde de révolution à deux nappes ; c) un ellipsoïde de révolution.

3.15. $\mathbf{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r}$.

3.16. $\mathbf{E} = \frac{\rho_0}{3\alpha\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} (1 - e^{-\alpha r^3})$. $E \propto 1/r^2$ pour de grands r, $E \propto r$ pour de petits r.

3.17.
$$E_x = \begin{cases} \frac{\rho x}{\varepsilon\varepsilon_0} & \text{pour } |x| \leqslant a, \\ \frac{\rho a}{\varepsilon\varepsilon_0} \frac{x}{|x|} & \text{pour } |x| > a ; \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} & \text{pour } |x| \leqslant a, \\ -\left[\frac{\rho a^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\rho a(|x|-a)}{\varepsilon_0}\right] & \text{pour } |x| > a. \end{cases}$$

3.18. $E = \frac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{a^2+r^2}}$, $\lim_{a\to\infty} E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

3.19. $\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r+a}{r-a}$, $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2a\lambda}{r^2-a^2}$. Pour $r \gg a$: $\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2a}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$; $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2a\lambda}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$ ($q = 2a\lambda$ est la charge totale de la tige).

3.20. 1) $E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r}$, $\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$; 2) $E = 3{,}6 \cdot 10^3$ V/m, $\varphi = -0{,}83 \cdot 10^5$ V.

Indication. Dans le cas considéré on ne peut pas poser $\varphi = 0$ pour $r = \infty$. Dans l'expression de φ il faut choisir la constante additive telle que $\varphi = 0$ pour $r = r_0$. Il est logique de prendre r_0 égal à 1 m.

3.21. 1) $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2+x^2}}$, $\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(r^2+x^2)^{3/2}}\mathbf{e}_x$. Pour $x=0$: $\varphi=$ $=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$, $\mathbf{E}=0$. 2) Pour $|x|\gg r$: $\varphi\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|x|}$, $\mathbf{E}\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}\frac{x}{|x|}\mathbf{e}_x$ (comme pour une charge ponctuelle). 3) $E_m=1{,}93\cdot10^4$ V/m; $x_m=\pm r/\sqrt{2}=$ $=\pm 42{,}4$ mm. 4) Pour la courbe de potentiel les points x_m sont points de flexion.

3.22. a) $\varphi=\frac{q}{2\varepsilon_0\pi r^2}(\sqrt{r^2+x^2}-\sqrt{x^2})$, $E_x=\frac{q}{2\varepsilon_0\pi r^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2}}-\frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}\right)$. Pour $|x|\ll r$ c'est le champ d'un plan infini chargé: $\varphi=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(r-|x|)$, $E_x=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{|x|}$, où $\sigma=\frac{q}{\pi r^2}$. Pour $|x|\gg r$ c'est le champ d'une charge ponctuelle: $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|x|}$, $E_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}\frac{x}{|x|}$. b) $\varphi=1{,}4\cdot10^5$ V; $E_x=$ $=1{,}0\cdot10^6$ V/m.

I n d i c a t i o n. Se servir du résultat du problème 3.21 et du principe de superposition des champs.

3.23. $\varphi=\frac{q}{2\varepsilon_0\pi(b^2-a^2)}(\sqrt{b^2+x^2}-\sqrt{a^2+x^2})$, $E=\frac{q|x|}{2\varepsilon_0\pi(b^2-a^2)}\times$ $\times\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{b^2+x^2}}\right)$. Pour $|x|\gg b$ c'est le champ d'une charge ponctuelle: $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|x|}$, $E\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}$.

I n d i c a t i o n. Se servir du résultat du problème 3.22 et du principe de superposition des champs.

3.24. a) $E_x=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2}}-\frac{x+a}{\sqrt{r^2+(x+a)^2}}-\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2}}+\right.$ $\left.+\frac{x-a}{\sqrt{r^2+(x-a)^2}}\right]$;

b) $E_x(0)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[1-\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}\right]\approx\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{a}{r}\right)$;

c) $E_x(a-0)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[1-\frac{a}{\sqrt{r^2+4a^2}}\right]\approx\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{a}{r}\right)$;

d) $E_x(a+0)=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{a}{\sqrt{r^2+4a^2}}\approx-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{a}{r}$;

e) $E_x=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2(2aq)}{x^3}$, où $q=\pi r^2\sigma$ (comme pour le dipôle de moment $p=2aq$).

I n d i c a t i o n. Se servir du résultat du problème 3.22 et du principe de superposition des champs.

3.25. $a=b\sqrt{3}$, $r=2b$, $\vartheta=60°$.

3.26. $\varphi=\frac{R\sigma}{2\varepsilon_0}$, $E=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$.

I n d i c a t i o n. Pour déterminer E, placer l'origine des coordonnées sphériques au centre de l'hémisphère, décomposer la surface de l'hémisphère en éléments d'aire $dS=2\pi R^2\sin\vartheta\,d\vartheta$ et se servir de la réponse du problème 3.21.

3.27. $\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3}{2} \frac{q}{R} = 6{,}8 \cdot 10^5$ V.

Indication. Se servir du résultat du problème 3.11 pour φ.

3.28. $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3}{2} \frac{q}{R^3} \left(R^2 - \frac{1}{3} r^2\right)$, $\varphi = 6{,}2 \cdot 10^5$ V.

3.29. Le champ à l'intérieur de la cavité est uniforme et a l'intensité $\mathrm{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{a}$, où $\mathbf{a}$ est un vecteur mené du centre de la sphère au centre de la cavité.

Indication. Se servir de l'expression vectorielle de l'intensité du champ à l'intérieur d'une sphère portant une charge volumique et du principe de superposition des champs.

3.30. a) $E_1 = E_2 = E$, $D_1 = D$, $D_2 = \varepsilon D$; b) $E_1 = E_2 = \frac{2}{1+\varepsilon} E$, $D_1 = \frac{2}{1+\varepsilon} D$, $D_2 = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} D$. La densité de lignes E est la même dans tout l'espace entre les armatures ; les lignes D dans la partie *2* de l'espace entre les armatures sont ε fois plus denses que dans la partie *1*.

3.31. a) $E_1 = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} E$, $E_2 = \frac{2}{1+\varepsilon} E$, $D_1 = D_2 = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} D$; b) $E_1 = E$, $E_2 = \frac{1}{\varepsilon} E$, $D_1 = D_2 = D$. La densité des lignes D est la même dans tout l'espace entre les armatures ; les lignes E dans la partie *2* de l'espace entre les armatures sont ε fois moins denses que dans la partie 1.

3.32. $E_2 = \frac{1}{\varepsilon_2} E_1 \sqrt{\varepsilon_2^2 \sin^2 \alpha_1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \alpha_1} = 5{,}2$ V/m, $\alpha_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \operatorname{tg} \alpha_1\right) = 74°$, $\sigma' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 (\varepsilon_2 - 1)}{\varepsilon_2} E_1 \cos \alpha_1 = 64$ pC/m² (ε_2 désigne la permittivité diélectrique du verre).

3.33. $\sigma'_{\max} = (\varepsilon - 1) \, \varepsilon_0 E = 3{,}5$ nC/m², $\langle \sigma' \rangle = \frac{1}{2} \sigma'_{\max} = 1{,}8$ nC/m².

3.34. $\omega = 2 \sqrt{\frac{3 P_r E}{l^2 \delta}}$.

3.35. $f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2} = 0{,}36$ mN.

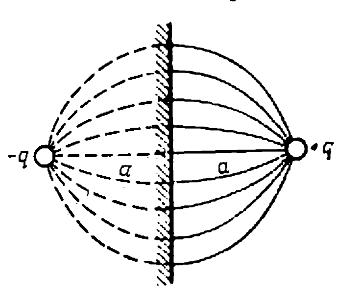


Fig. 221

Indication. Il découle de la condition d'équilibre des charges sur le conducteur que le champ à l'intérieur du métal, représentant la superposition du champ de la charge q et de celui des charges superficielles σ induites sur la parois, est nul.

Par conséquent, le champ créé par les charges σ dans le métal coïncide avec le champ qu'aurait créé une charge $-q$ placée dans le même point où se trouve la charge q. En vertu de la symétrie le champ créé par les charges σ à l'extérieur du métal coïncide avec le champ qu'aurait créé la charge $-q$ placée à l'intérieur du métal au point qui est l'image symétrique du point auquel se trouve la charge q (fig. 221). La charge fictive $-q$ est dite image de la charge q, la méthode de la résolution s'y appuyant, méthode des images électriques.

3.36. $\sigma = -\frac{qa}{2\pi (a^2 + x^2)^{3/2}}$; $q_{\text{ind}} = -q$.

3.37. $U_1 = 200$ V; $U_2 = 100$ V; $q = 20$ nC; $C = 66$ pF.

3.38. $q_1=q_2=q_3=\frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2+C_1C_3+C_2C_3}\mathscr{E}=55\ \mu C.$

3.39. $q_1=\frac{C_1}{2}\frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}\mathscr{E}=-24\ \mu C$; $q_2=\frac{C_2}{2}\frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}\mathscr{E}=-36\ \mu C$, $q_3=$ $=\frac{C_2-C_1}{2}\mathscr{E}=+60\ \mu C.$

3.40. $C_1=\frac{\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln[(b-a)/a]}=9{,}5\ \text{pF/m}.$

3.41. a) $C\approx 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a=C'/2$, où C' est la capacité d'une sphère de rayon a; b) $C=0{,}58$ pF.

Indication. Pour $b\gg a$ on peut supposer que les charges sont distribuées suivant la surface des billes avec densité constante.

3.42. $A=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{a-b}{ab}=9\ \mu J.$

3.43. $\langle\rho'\rangle=-\frac{U}{d^2}\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}=-8{,}8\ \text{mC/m}^2$, $C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}=280\ \text{pF}.$

3.44. Relions l'origine des x à l'armature positive. Alors, $D=D_x>0$ et $E=E_x>0$, de plus

$$E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon}=\frac{q}{S\varepsilon_0\varepsilon(x)}=E(x).$$

Considérons un plan parallèle aux armatures et situé à la distance x de l'origine des coordonnées. Le flux de vecteur **E** qui le traverse est donné par $\Phi(x)=$ $=E(x)S$ et est dirigé le long de l'axe des x. Prenons une couche isolante d'épaisseur dx. Un flux $\Phi(x)$ entre dans cette couche et un flux $\Phi(x+dx)=\Phi(x)+$ $+\frac{d\Phi}{dx}dx$ en apparaît.

Le flux total de vecteur **E** émergent de la couche a pour valeur $\frac{d\Phi}{dx}dx=$ $=S\frac{dE}{dx}dx$. D'après le théorème de Gauss ce flux doit être égal à la charge liée à l'intérieur de la couche $\rho'(x)S\,dx$ divisée par ε_0:

$$S\frac{dE}{dx}dx=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho'(x)S\,dx.$$

D'où

$$\rho'(x)=\frac{d(\varepsilon_0 E)}{dx}=-\frac{q}{S\varepsilon^2}\frac{d\varepsilon}{dx}.$$

La charge volumique globale s'en déduit par l'intégration

$$q'=\int\rho'(x)S\,dx=q\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}.$$

La charge globale liée (volumique plus superficielle) est nulle comme cela devrait être. Le lecteur est tenu à le vérifier.

3.45. a) $W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}(\sqrt{2}+4)$; b) $W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}(\sqrt{2}-4)$; c) $W=$ $=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}\sqrt{2}.$

3.46. $W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{\substack{k=1 \\ (\text{excepté } k=i)}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_k}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_k|}$ (voir la réponse du problème 3.10),

soit, sous la forme plus condensée,

$$W=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,\,k=1 \\ (i\neq k)}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_k}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_k|}.$$

3.47. $W=\frac{1}{2}\int\limits_V \rho(\mathbf{r}')\,dV' \int\limits_V \frac{\rho(\mathbf{r})\,dV}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$.

Indication. Appliquer la formule $W=\frac{1}{2}\int\limits_{V_i} \varphi(\mathbf{r}')\,\rho(\mathbf{r}')\,dV'$ et utiliser la réponse du problème 3.11.

3.48. a) $a=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4e^2}{m_e v_0^2}$; b) $a=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{m_e v_0^2}$.

3.49. $A=\frac{q^2\Delta x}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}=11{,}3$ μJ.

3.50. $W=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=27$ =mJ.

3.51. $W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{6}{10}\frac{q^2}{R}=0{,}54$ J, $W_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{10}\frac{q^2}{R}=0{,}09$ J, $W_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times$ $\times\frac{5}{10}\frac{q^2}{R}=0{,}45$ J.

Indication. Pour le calcul de W se servir de la formule

$$W=\frac{1}{2}\int \varphi(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r})\,dV$$

et utiliser la réponse du problème 3.28.

3.52. $R=\frac{R_1}{2}+\sqrt{\frac{R_1^2}{4}+R_1R_2}=4\Omega$.

Indication. Le circuit étant indéfini, tous les maillons à partir du second peuvent être remplacés par une résistance égale à celle recherchée R.

3.53. $R=\frac{\rho}{2\pi d}\ln\frac{b}{a}$.

3.54. $R=\frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$; pour $b\to\infty$, $R=\frac{\rho}{4\pi a}$.

3.55. a) $A_1=\frac{1}{4}CU^2=63$μJ ; b) $A_2=-\frac{1}{2}CU^2=-125$ μJ.

3.56. a) $A_1=\frac{CU^2}{2}\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon+1}=36$ μJ; b) $A_2=-CU^2\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon+1}=-71$ μJ.

3.57. $I=\frac{US}{d}=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)}=5{,}9$ nA.

3.58. 1. a) $E_1=\frac{\rho_1 U}{\rho_1 d_1+\rho_2 d_2}=25$ kV/m, $E_2=\frac{\rho_2 U}{\rho_1 d_1+\rho_2 d_2}=50$ kV/m, $D_1=\varepsilon_0\varepsilon_1 E_1=0{,}44$ μC/m², $D_2=\varepsilon_0\varepsilon_2 E_2=1{,}33$ μC/m² ; b) $\sigma_1=D_1=0{,}44$ μC/m², $\sigma_2=-D_2=-1{,}33$μ C/m², $\sigma=D_2-D_1=0{,}89$ μC/m² ; c) $\sigma_1'=-\varepsilon_0(\varepsilon_1-1)E_1=$

$= -0{,}22\ \mu C/m^2$, $\sigma'_2 = \varepsilon_0(\varepsilon_2 - 1)E_2 = +0{,}88\ \mu C/m^2$, $\sigma' = -(\sigma'_1 + \sigma'_2) = -0{,}66\ \mu C/m^2$; d) $j = E_1/\rho_1 = E_2/\rho_2 = 2{,}5\ \mu A$.

2. a) $E_1 = \frac{U}{d_1} = 50$ kV/m, $E_2 = 0$, $D_1 = \varepsilon_0\varepsilon_1 E_1 = 0{,}88\ \mu C/m^2$, $D_2 = 0$; b) $\sigma_1 = D_1 = 0{,}88\ \mu C/m^2$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma = -D_1 = -\sigma_1 = -0{,}88\ \mu C/m^2$; c) $\sigma'_1 = -\varepsilon_0(\varepsilon_1 - 1)E_1 = -0{,}44\ \mu C/m^2$, $\sigma'_2 = 0$, $\sigma' = -\sigma'_1 = 0{,}44\ \mu C/m^2$; d) $j = 0$.

3.59. $i = \frac{UC}{\rho\varepsilon\varepsilon_0} = 0{,}97\ \mu A$.

3.60. $i = \frac{UC}{\rho\varepsilon\varepsilon_0}$. Deux méthodes sont valables: 1. Supposer que le condensateur chargé jusqu'à la tension U et débranché de la source est immergé dans le milieu considéré. Ecrire l'expression de l'intensité du courant traversant une surface arbitraire fermée entourant l'une des armatures du condensateur. Appliquer ensuite à la même surface le théorème de Gauss pour **E**. 2. Diviser l'espace entre les armatures en de très petits volumes (à la limite, infinitésimaux) limités par des surfaces équipotentielles et par des lignes de champ **E** (coïncidant avec les lignes de vecteur **j**). Ecrire les expressions de la résistance et de la capacité du système infini de résistances (condensateurs) associés en parallèle-série formé à la suite d'une telle décomposition. Tenir compte du fait qu'en introduisant des armatures infiniment minces et infiniment conductrices le long des surfaces équipotentielles on ne fait varier ni la capacité ni la résistance du système.

3.61. $R = \frac{\rho(b-2a)}{2\pi a(b-a)}$. Pour $b \gg a$, $R = \frac{\rho}{2\pi a} = 2R_1$, où R_1 est la résistance entre la bille et la frontière extérieure du milieu qui l'entoure (voir la réponse du problème 2.54).

I n d i c a t i o n. Se servir des résultats des problèmes 3.41 et 3.60.

3.62. $i = U\frac{a}{d}\varepsilon_0(\varepsilon - 1)v = 1{,}7$ nA.

3.63. $t = -RC\ln\left(1 - \frac{U}{U_0}\right) = 0{,}69\ \mu s$.

3.64. $\rho = \frac{\tau}{\varepsilon\varepsilon_0 \ln(q_0/q)} = 2{,}33\ G\Omega\cdot m$.

3.65. a) $q = q_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}t}$; b) $Q = \frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$.

S o l u t i o n. Le courant traversant la surface de rayon r $(a \leqslant r \leqslant b)$ est égal à $i(r) = 4\pi r^2 j(r) = 4\pi r^2 \sigma E(r)$, où $E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q(r)}{r^2}$; $q(r)$ est la charge libre enfermée dans la sphère de rayon r. L'intensité du courant $i(r)$ peut se présenter sous la forme $-dq(r)/dt$. En remplaçant $i(r)$ et $E(r)$ par leurs expressions, il vient: $\frac{dq(r)}{dt} = -4\pi r^2\sigma\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q(r)}{r^2}$ d'où $q(r) = q_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}t}$. Cette dernière formule fournit, également, la loi de la variation de $q = q(a)$. L'expression de l'intensité du courant

$$i(r) = -\frac{dq(r)}{dt} = \frac{\sigma q_0}{\varepsilon\varepsilon_0}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}t}$$

ne dépend pas de r. Il s'ensuit que $i(r)$ est le même pour tous les r. La quantité de chaleur dégagée est donnée par

$$Q = \int_0^\infty Ri^2\,dt,$$

où l'on prend pour R l'expression obtenue dans le problème 3.54 (en remplaçant ρ par σ).

3.66. $\varphi_1 - \varphi_2 = -4{,}5$ V.

3.67. $\varphi_A - \varphi_B = 0$.

3.68. $i_1 = \frac{R_2\mathscr{E}}{D} = 0{,}87$ A, $i_2 = -\frac{R_3\mathscr{E}}{D} = -1{,}31$ A, où $D = (R_0 + R_1) R_2 + (R_0 + R_1 + R_2) R_3$.

3.69. $i = \frac{(R_3 + R_4 + R_5)(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2) + R_7(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_3)}{D} = 0{,}6$ A,

$$i_2 = \frac{-(R_1 + R_2 + R_6)(\mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3) - R_7(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_3)}{D} = -2{,}9 \text{ A},$$

$$i_3 = \frac{(R_3 + R_4 + R_5)(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2) - (R_1 + R_2 + R_6)(\mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3)}{D} = -2{,}3 \text{ A},$$

où $D = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6) R_7 + (R_1 + R_2 + R_6)(R_3 + R_4 + R_5)$.

3.70. a) $i_1 = i_3 = +1{,}00$ A, $i_2 = i_4 = -1{,}00$ A, ne changeront pas; b) $i_1 = -0{,}92$A, $i_2 = +0{,}04$ A, $i_3 = +0{,}36$ A, $i_4 = +0{,}52$ A.

3.71. $i_1 = \frac{R_2(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_3) + R_3(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)}{R_1R_2 + R_3R_3 + R_2R_3} = -6{,}3$ mA,

$$i_2 = \frac{R_1(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3) + R_3(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = +1{,}8 \text{ mA},$$

$$i_3 = \frac{R_1(\mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_2) + R_2(\mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_1)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = +4{,}5 \text{ mA},$$

$$i_4 = 0.$$

3.72. $U = U_0 \frac{Rx}{Rl + R_0(l - x)x/l}$; pour $R \gg R_0$ $U = U_0 \frac{x}{l}$.

3.73. 12 m.

3.74. $n = \sqrt{\frac{R}{R_0} N} = 6$; $W_{\max} = \frac{N\mathscr{E}^2}{4R_0} = 30$ W.

3.75. a) $i = \frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$; b) $q = q_0\left(1 - e^{-\frac{\tau}{RC}}\right) = 0{,}18$ mC. c) $Q = \frac{q_0^2}{2C}\left(1 - e^{-\frac{2\tau}{RC}}\right) = 92$ mJ.

3.76. $Q = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{CU^2}{2} = 62{,}5$ mJ.

3.77. a) $B = \mu_0 \frac{i}{2R} = 6{,}3$ μT; b) $B = \mu_0 \frac{R^2 i}{2(R^2 + b^2)^{3/2}} = 2{,}3$ μT.

3.78. $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi b\sqrt{1 + (b/a)^2}}$; $\lim\limits_{a \to \infty} B = \frac{\mu_0 i}{2\pi b}$.

3.79. $B = \mu_0 \frac{i}{2R} \frac{n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$. A la limite, lorsque $n \to \infty$, $B = \mu_0 \frac{i}{2R}$ (comparer à la réponse du problème 3.77a).

3.80. $B = \mu_0 \frac{i}{4\pi b} \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4b^2}} = 8{,}9$ μT.

3.81. $H = \frac{ni}{2}\left[\frac{(l/2) - x}{\sqrt{r^2 + [(l/2) - x]^2}} + \frac{(l/2) + x}{\sqrt{r^2 + [(l/2) + x]^2}}\right]$. a) $H = ni$; b) $H = ni/2$.

3.82. $p_m = i\pi N\{(R_1 - d)(R_2 + d) + Nd^2(N/3 + 1/2)\} = 2{,}2 \ \text{mA}\cdot\text{m}^2$, $H = 1/2 i\{(1/d)\ln(R_2/R_1) + 1/2R_1 + 1/2R_2\} = 23 \ \text{A/m}$.

Indication. Se servir de la formule de calcul approché des sommes à l'aide des intégrales:

$$f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(b)=\frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx+\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)$$

(voir, par exemple, I. Zeldovitch et A. Mychkis, *Eléments de mathématiques appliquées*. Ed. Mir. Moscou, 1973.

3.83. $\mathbf{H}=\frac{1}{2}\mathbf{j}\times\mathbf{r}$ pour $r\leqslant R$, $\mathbf{H}=\frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}\mathbf{j}\times\mathbf{r}$ pour $r\geqslant R$.

3.84. Le champ à l'intérieur de la cavité est uniforme et a l'intensité $\mathbf{H}=\frac{1}{2}\mathbf{j}\times\mathbf{b}$, où $\mathbf{b}$ est le vecteur mené de l'axe du fil à l'axe de la cavité et perpendiculaire à ces axes.

Indication. Se servir de la réponse du problème précédent et du principe de superposition des champs.

3.85. $B=\mu_0\frac{4\pi\sigma nR}{3}=26$ pT.

3.86. $B=0$.

3.87. $M=\frac{2}{5}mR^2\omega$; $p_m=\frac{1}{5}qR^2\omega$; $\frac{p_m}{M}=\frac{q}{2m}$.

3.88. $B_2=\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 B_1=1{,}26$ mT.

3.89. $H=\frac{U_m r}{2d}\sqrt{\sigma^2+(\varepsilon\varepsilon_0\omega)^2}\cos\left(\omega t+\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon\varepsilon_0\omega}{\sigma}\right)$.

3.90. Indication. Considérer la circulation du vecteur **H** le long d'un contour arbitraire situé sur la surface sphérique de rayon r ($a<r<b$); tenir compte des courants de déplacement.

3.91. $f=\frac{3\pi\mu_0 N^2 r^4 i^2}{2l^4}=4$ nN.

3.92. $r_m=\frac{1}{2\sqrt{a}}$, $\chi=(\mu-1)=\frac{f_m\delta}{\mu_0 m H_0^2}\sqrt{\frac{e}{\alpha}}=0{,}77\cdot10^{-5}$ (δ est la densité de la bille).

3.93. $f=\frac{\mu_0}{2\pi}i_1 i_2\frac{a^2}{b^2-(a/2)^2}=6$ µN. $A=\frac{\mu_0}{\pi}i_1 i_2 a\ln\frac{2b+a}{2b-a}=0{,}33$ µJ.

3.94. $i_m=\frac{k}{2NSB}\operatorname{arctg}\frac{l_2}{2l_1}=0{,}9$ mA (S est l'aire du cadre).

3.95. $B=\frac{\sigma_p\pi d^2}{4ir}=18$ kT (la valeur limite possible de B obtenue à l'aide des électro-aimants à noyau de fer est inférieure à 10 T).

3.96. $\Delta P=\frac{\pi\mu_0 d^2 nNi^2}{4l}=0{,}13$ µN.

3.97. $i=\frac{Bv\sin\alpha}{R_1(1+\sin\alpha)}=$ const, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

3.98. $i=\frac{Bv}{R_1(1+\alpha/\sin\alpha)}$.

3.99. $U=B\pi nl(l-2l_1)=5{,}3$ mV.

3.100. a) $U=\frac{2\pi^2 n^2 a^2 m_e}{e}=2{,}0$ nV ; b) $U=\pi n B a^2=33$ mV.

3.101. a) $i=\frac{\mu_0 v I}{2\pi R}\ln\frac{b}{a}$, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre ; b) $f=\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\right)^2\frac{v}{R}$, $x=\frac{b-a}{\ln(b/a)}$; c) $P=\left(\frac{\mu_0 v I}{2\pi R}\ln\frac{b}{a}\right)^2 R=$ $=Ri^2$.

3.102. $v=\frac{mgR(\sin\alpha-k\cos\alpha)}{B^2 l^2}$.

3.103. La pièce se déplace avec l'accélération constante de valeur

$$w=\frac{mg(\sin\alpha-k\cos\alpha)}{m+CB^2l^2}.$$

3.104. Pour $B<B_0$ $\left(B_0^2=\frac{8R\sqrt{mga(I_0+ma^2)}}{b^4}\right)$,

$$\alpha=(\alpha_0/\cos\gamma)e^{-\beta t}\cos(\omega t+\gamma),\ \text{où}\ \beta=\frac{B^2b^4}{8R(I_0+ma^2)};$$

$$\omega=\sqrt{\frac{mga}{I_0+ma^2}-\frac{B^4b^8}{64R^2(I_0+ma^2)^2}};\ \gamma=\text{arc tg}(-\beta/\omega).$$

Pour $B\geqslant B_0$ le pendule retourne apériodiquement à la position d'équilibre.

3.105. $\alpha=\alpha_0\cos\omega t$, où $\omega=\sqrt{\frac{4mga}{4I_0+4ma^2+CB^2b^4}}$.

3.106. a) $i=\frac{mg}{Bb}\cos\omega t$ (le temps est compté à partir du moment où la tige est horizontale ; le courant est positif s'il passe de l'axe de rotation à l'anneau) ; b) $\mathscr{E}=\frac{1}{2}Bb^2\omega+\frac{mgR}{Bb}\cos\omega t$.

3.107. $H=\frac{qR}{2\mu_0 SN}=400$ kA/m.

3.108. $L=\frac{\pi\mu\mu_0 N^2 d^2}{4(l+0{,}45d)}=1{,}3$ mH.

3.109. $L=\frac{\mu\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{b-a}{a}=18$ µH.

3.110. $L_1=\frac{\mu_0}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\ln\frac{b}{a}\right)=1{,}40$ µH/m.

3.111. $C_1=\frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln(b/a)}=100$ pF/m, $L_1=\frac{\mu\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}=0{,}26$ µH/m.

I n d i c a t i o n. Pour déterminer L_1, calculer l'énergie du champ magnétique lié au câble.

3.112. a) $\tau_1=0{,}58$ s ; b) $\tau_2=2\tau_1=1{,}16$ s.

3.113. $Q=\frac{R}{R+R_0}\frac{L\mathscr{E}^2}{2R_0^2}=6{,}0$ µJ.

I n d i c a t i o n. Se servir de l'expression de l'énergie du courant.

3.114. $\mu=\frac{(\pi d-b)H}{Ni-bH}=8\cdot10^2$.

3.115. $\mu_{max}\approx9800$ pour $H=65$ A/m.

3.116. $L_{12}=\frac{\mu\mu_0 N\delta}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$.

3.117. $W=\frac{BH}{2}\pi(b+a)(b-a)^2=2{,}3$, J.

Indication. Se servir du graphique représenté fig. 140.

3.118. $q=\frac{N_1B(b-a)^2}{R}=2{,}4$ mC.

3.119. Le théorème de la circulation du vecteur H conduit à l'équation suivante reliant H et B dans le fer:

$$B=\frac{Ni\mu_0}{b}-\frac{(\pi d-b)\mu_0}{b}H=a-kH.$$

En outre, B et H sont reliés, dans le fer, par $B = f(H)$, dont le graphique est donné fig. 140. Les valeurs inconnues de H et B satisfont simultanément aux deux équations. La solution graphique de ce système d'équations (consistant à déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite $B = a - kH$ avec la courbe $B = f(H)$) conduit à $H=0{,}33$ kA/m ; $B=1{,}3$ T.

a) $\mu=\frac{B}{H\mu_0}=3\cdot10^3$; b) $\Phi=BS=0{,}7$ mWb ; c) $W_1=\frac{BH}{2}(\pi d-b)S=$ $=0{,}11$ J, $W_2=\frac{B^2}{2\mu_0}bS=0{,}7$ J, $W=W_1+W_2=0{,}8$ J ; d) $L=\frac{N\Phi}{i}=\frac{2W}{i^2}=$ $=0{,}2$ H.

3.120. $Q=0{,}53$ kJ.

3.121. a) $v=\sqrt{\frac{2eU}{m_e}}=5{,}9\cdot10^6$ m/s ; b) $v=c\sqrt{1-\left(\frac{m_ec^2}{eU+m_ec^2}\right)^2}=$ $=1{,}64\cdot10^8$ m/s.

Indication. Dans le cas b) il faut partir de la formule relativiste pour l'énergie cinétique W de la particule de masse au repos m_0:

$$W=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2,$$

(c est la célérité de la lumière dans le vide).

3.122. $v_c=1{,}88\cdot10^8$ m/s, $v_r=1{,}64\cdot10^8$ m/s.

3.123. $e'=\frac{mgd}{U}\left(\frac{v_2}{v_1}+1\right)=8{,}0\cdot10^{-19}$ C$=5e$.

3.124. $v_{min}=v_0\sin\alpha$, $C=\frac{eE}{m_ev_0^2\sin^2\alpha}$.

3.125. $f=\frac{\mu\mu_0 niev}{2}=0{,}018$ pN.

3.126. a) $r=\frac{m}{e'}\frac{v}{B}=7{,}3$ cm ; b) $p_m=\frac{mv^2}{2B}=0{,}041$ pJ/T, $\mathbf{p}_m$ et $\mathbf{B}$ étant de sens opposés; c) $\frac{p_m}{M}=\frac{e'}{2m}=24{,}1$ MC/kg.

3.127. $x=\frac{mv_0\sin\alpha}{eB}\sin\left(\frac{e}{m}Bt\right)$, $y=\frac{mv_0\sin\alpha}{eB}\left[1-\cos\left(\frac{e}{m}Bt\right)\right]$, $z=v_0t\cos\alpha$. Points d'intersections :

a) $y=0$, $z=\frac{2\pi mv\cos\alpha}{eB}k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$;

b) $y=\frac{2mv\sin\alpha}{eB}$, $z=\frac{2\pi mv\cos\alpha}{eB}\left(k+\frac{1}{2}\right)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

3.128. $l = 2\pi \frac{m_e}{e} \frac{v}{B} = 21$ mm.

3.129. $v = \frac{eB}{2\pi m_e} \sqrt{(\pi d)^2 + l^2} = 4{,}5 \cdot 10^7$ m/S.

3.130. La particule évolue dans le plan xy conformément à la loi:

$$x = v_0 t - a \sin \omega t, \quad y = a (1 - \cos \omega t),$$

où $v_0 = E/B$, $a = mE/e'B^2$, $\omega = (e'/m) B$ (voir la fig. 222).

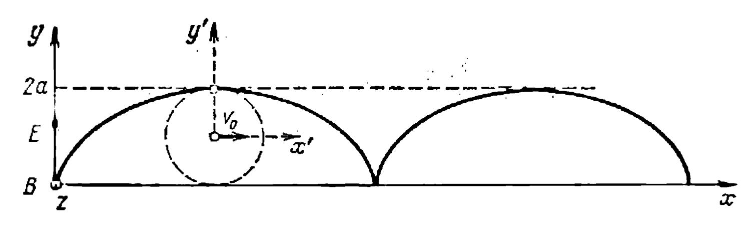


Fig. 222

En passant au référentiel K' tel que $x' = x - v_0 t$, $y' = y - a$ (l'origine de ce référentiel est déplacée de a le long de l'axe des y et est animée d'une vitesse v_0 le long de l'axe des x), le mouvement de la particule est régi par les équations $x' = -a \sin \omega t$, $y' = -a \cos \omega t$. Cela veut dire que dans le référentiel K' la particule décrit une circonférence de rayon a avec une vitesse angulaire constante ω. Par conséquent, par rapport au référentiel fixe, la particule se déplace comme un point de la jante d'une roue de rayon a roulant sur un plan avec la vitesse v_0. La trajectoire décrite par le point est, dans ce cas, une cycloïde. La vitesse de la particule varie entre 0 et $2v_0$ conformément à la loi: $v = v_0 \sqrt{2 - 2 \cos \omega t}$.

3.131. $\frac{e}{m} = \frac{2Ub^2}{B^2 l_1^2 (^1/_2 l_1 + l_2)^2} = 1{,}8 \cdot 10^{11}$ C/kg.

3.132. $A = \frac{elBB'N_A}{2E}$; $A_1 = 4{,}0$; $A_2 = 3{,}0$. Les pics correspondent aux isotopes ^{4}He et ^{3}He.

3.133. a) $W = \frac{B^2 e^2 d^2}{8m_p} = 17{,}2$ MeV ; $v = \frac{Bed}{2m_p} = 5{,}8 \cdot 10^7$ m/s $= 0{,}19c$; b) $\tau = \frac{B\pi d^2}{8U} = 4{,}7$ µs ; c) $s = \alpha \sum_{n=1}^{N} \sqrt{n} \approx \alpha \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1} + \frac{1}{2}\sqrt{N} + \int_1^N \sqrt{x}\, dx \right)$*) $\approx \alpha \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{N} + {}^2/_3 \sqrt{N^3} \right)$, où $\alpha = \pi \sqrt{\frac{2m_p U}{eB^2}} = 0{,}131$, $N = \frac{W}{eU} = 172$. En substituant les valeurs de α et de N, on obtient $s = 198$ m.

3.134. a) $s = \frac{2W\tau}{reB_1} = 1{,}7 \cdot 10^6$ m $= 1700$ km ; b) $v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_e c^2}{W + m_e c^2} \right)^2} = 0{,}99995c$; ici m_e est la masse au repos de l'électron, c, la célérité de la lumière dans le vide (voir la réponse du problème 3.121b).

3.135. $\frac{e}{m} = \frac{(\pi d)^2 Nn}{qR} = -1{,}8 \cdot 10^{11}$ C/kg.

3.136. $e\varphi = kT^2 \left(\frac{1}{i} \frac{\Delta i}{\Delta T} - \frac{2}{T} \right) = 3{,}1$ eV.

---

*) Voir la note du problème 3.82.

Indication. Tenir compte de la petitesse de ΔT et de Δi.

3.137. $n=\frac{Bi}{aeU_{34}}=1,1\cdot 10^{29}$ m^{-3}, $u_0=\frac{lU_{34}}{bU_{12}B}=3,2\cdot 10^{-3}$ m^2/V·s.

3.138. $W=e(\mathscr{E}+\varphi_W-\varphi_{Ni})=9,6$ eV ($e\varphi_W$ est le travail d'extraction de l'électron du tungstène, $e\varphi_{Ni}$, celui du nickel).

3.139. $\Delta W=1,1$ eV.

3.140. $\lambda=\frac{m_1+m_2}{m_2}\frac{\varphi_1}{E}=2,7$ cm (m_1 est la masse d'un ion d'hydrogène, m_2, la masse de l'atome d'hélium).

3.141. $\mathscr{E}_m=2\pi nBS=15,1$ mV, $\mathscr{E}=\mathscr{E}_m/\sqrt{2}=10,7$ mV.

3.142. a) $I=71$ mA; b) $\varphi=-63°$ (le courant est en avance sur la tension); c) $U_R=57$ V, $U_L=28$ V, $U_C=142$ V; d) $W=4,0$ W.

3.143. a) $Q=\frac{RU^2}{R^2+4\pi^2\nu^2L^2}=2,4$ kJ/s ; b) augmente de 2 fois.

3.144. $U_1=\frac{U\omega L}{R}=1,0$ kV, $I=\frac{U}{R}=10$ A.

3.145. $$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}=3,2\cdot 10^4 \text{ rd/s},$$

$$I_1=\frac{U}{R}\left[(1-\omega^2LC)^2+(\omega CR)^2\right]=UR\frac{C}{L}=22 \text{ mA},$$

$$I_2=\omega CU=U\sqrt{\frac{C}{L}-R^2\frac{C^2}{L^2}}=7,0 \text{ A},$$

$$I_3=\frac{U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}=U\sqrt{\frac{C}{L}}=7,0 \text{ A}.$$

Indication. Les formules données dans la réponse ne sont valables que lorsque $R \ll \omega L$.

3.146. De 186 m à 570 m.

3.147. $W=\frac{RI_m^2}{2}=0,15$ mW.

3.148. $W=\frac{RCU_m^2}{2L}=4,2$ mW.

3.149. $Q=\sqrt{\frac{L}{CR^2}-\frac{1}{4}}=5,00$, $\frac{\Delta Q}{Q}\approx\frac{CR^2}{8L}=0,005\sim 0,5$ %.

3.150. $\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0}=1-\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2+1}}\approx\frac{1}{8Q^2+2}=0,0012\sim 0,12$ %.

3.151. $W=W_0e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}$, 50 %.

3.152. $Q\geqslant 7,1$.

3.153. a) $I_1/I_2=19$; b) $I_1/I_2=2,1$.

3.154. a) $U_1'=1,0$ mV, $U_2'=19$ mV ; b) $U_1'=10$ mV, $U_2'=21$ mV.

3.155. $W=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_m^2\pi r^2t=1,8$ kJ.

Indication. On tient compte du fait que t est bien supérieur à la période d'onde T.

3.156. $I=\frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}r^2E_m^2=1,1$ W.

Indication. On tient compte du fait que la densité de flux énergétique envoyé par le dipôle dans la direction faisant un angle θ avec son axe est proportionnelle à $\sin^2\vartheta$.

Partie 4

Optique

4.1. a) Respectivement 3,2 et 9,2 mW; b) $\Phi = (V_1 + V_2) \cdot \Phi_e / 2A = 1{,}6$ lm, où $A = 1{,}6$ mW/lm, V_1 et V_2 les valeurs de la fonction d'efficacité lumineuse pour les longueurs d'onde données.

4.2. $E_m^2 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} A\Phi / 2\pi r^2 V_\lambda$, d'où $E_m = 1{,}1$ V/m, $H_m = 3.0$ mA/m. Ici $A = 1{,}6$ mW/lm, V_λ est la fonction d'efficacité lumineuse pour la longueur d'onde donnée.

4.3. a) $\langle E \rangle = E_0/2$; b) $\langle E \rangle = \frac{I}{r^2} \frac{1 - \sqrt{1-(r/l)^2}}{1 - r/l} = 5$ lx.

4.5. a) $\Phi = \pi B \Delta S \sin^2 \vartheta$; b) $R = \pi B$.

4.6. $h \approx r$; $E = BS/4r^2 = 40$ lx.

4.7. $I = I_0/\cos^3 \vartheta$, $\Phi = \pi I_0 r^2/h^2 = 3 \cdot 10^2$ lm.

4.8. $E'_{max} = (9/16\pi\sqrt{3})\,\rho ES/r^2 = 0{,}21$ lx, à la distance $r\sqrt{3}$ du plafond.

4.9. $E = \pi B$.

4.10. $E = \pi B$.

4.11. $R = E_0 (1 + h^2/r_0^2) = 7 \cdot 10^2$ lx.

4.12. $E = \pi B r_0^2/h^2 = 25$ lx.

4.13. $\mathbf{e}' = \mathbf{e} - 2(\mathbf{en})\,\mathbf{n}$.

4.14. Soit $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ les vecteurs unités des normales aux plans des miroirs donnés, $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, les vecteurs unités du rayon incident et des rayons réfléchis par le premier, le second et le troisième miroir. Alors (voir la réponse du problème précédent):

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_0 - 2(\mathbf{e}_0\mathbf{n}_1)\,\mathbf{n}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 - 2(\mathbf{e}_1\mathbf{n}_2)\,\mathbf{n}_2, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 - 2(\mathbf{e}_2\mathbf{n}_3)\,\mathbf{n}_3.$$

En additionnant ces expressions membre à membre, il est facile de montrer que $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_0$.

4.15. $i_1 = \operatorname{arc\,tg} n = 53°$.

4.16. $n_1/n_2 = 1/\sqrt{\eta^2 - 1} = 1{,}25$.

4.17. $x = [1 - \sqrt{(1 - \sin^2 i)/(n^2 - \sin^2 i)}\,]\, d \sin i = 3{,}1$ cm.

4.18. $h' = \frac{hn^2 \cos^3 i}{(n^2 - \sin^2 i)^{3/2}}$.

4.21. $\vartheta = 83°$.

4.22. Entre 37° et 58°.

4.23. 8,7°.

4.24. $\Delta\varphi = \frac{2 \sin(\vartheta/2)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\vartheta/2)}} \Delta n = 0{,}44°$.

4.27. a) $f = l\beta/(1 - \beta^2) = 10$ cm ; b) $f = l\beta_1\beta_2/(\beta_2 - \beta_1) = 2{,}5$ cm.

4.28. $I = \rho I_0 f^2/(f - s)^2 = 2{,}0 \cdot 10^3$ cd.

4.29. Soit S la source lumineuse ponctuelle, S' son image (fig. 223). Il vient du principe de Fermat que les chemins optiques de tous les rayons issus

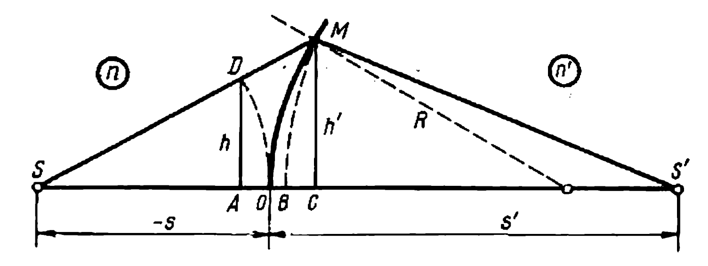


Fig. 223

de S et convergés vers S' sont les mêmes. Traçons les circonférences centrées en S et S' de rayons SO et $S'M$. Les chemins optiques (DM) et (OB) doivent alors être égaux entre eux:

$$n \cdot DM = n' \cdot OB. \qquad (*)$$

Par ailleurs, pour les rayons paraxiaux $DM \approx AO + OC$, où $AO \approx h^2/(-2S)$ et $OC \approx h'^2/2R$. En outre, $OB = OC - BC \approx h'^2/2R - h'^2/2s'$. En mettant ces expressions dans (*) et compte tenu de ce que $h' \approx h$, il vient: $n'/s' - n/s = (n' - s)/R$.

4.30. $x = \frac{nf}{n+1}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{n+1}{n-1}\frac{r^2}{f^2}}\right)$, $r_{max} = f\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$.

4.31. 6,3 cm.

4.32. a) $\beta = 1 - d(n-1)/nR = -0{,}20$; b) $E = \pi n^2 D^2 B/4d^2 = 42$ lx.

4.33. a) $\Phi = \Phi_0(n - n_0)/(n-1) = 2{,}0\delta$, $f' = -f = n_0/\Phi = 85$ cm; b) $\Phi = \Phi_0(2n - n_0 - 1)/2(n-1) = 6{,}7\delta$, $f = 1/\Phi \approx 15$ cm, $f' = n_0/\Phi = 20$ cm. Ici n et n_0 sont les indices du verre et du liquide.

4.35. $\Delta x \approx \Delta l \cdot f^2/(l-f)^2 = 0{,}5$ mm.

4.36. a) $f = [l^2 - (\Delta l)^2/4l] = 20$ cm; b) $f = l\sqrt{\eta}/(1+\sqrt{\eta})^2 = 20$ cm.

4.37. $h = \sqrt{h'h''} = 3{,}0$ mm.

4.38. $E = (1-\alpha)\pi BD^2/4f^2 = 15$ lx.

4.39. a) Est indépendante de D; b) est proportionnelle à D^2.

4.40. $f = n_0 R/2(n_1 - n_2) = 35$ cm, où n_0 est l'indice de l'eau.

4.41. $f = R/2(2n-1) = 10$ cm.

5.42. a) A droite de la dernière lentille à la distance 3,3 cm de celle-ci; b) $l = 17$ cm.

4.43. a) 50 et 5 cm; b) retirer de 0,5 cm.

4.44. $\Gamma = D/d$.

4.45. $u = u'/\sqrt{\eta} = 0{,}6'$.

4.46. $\Gamma' = (\Gamma + 1)(n - n_0)/n_0(n-1) - 1 = 3{,}1$.

4.47. $\Gamma \leqslant D/d_0 = 20$.

4.48. 60.

4.49. a) $\Gamma = 2uL_0/d_0 = 15$, où L_0 est la distance de la meilleure vision (25 cm); b) $\Gamma \leqslant 2uL_0/d_0$.

4.50. Les plans principaux passent par le centre de la lentille. Les distances focales dans l'air et dans l'eau: $f = -1/\Phi = -11$ cm, $f' = n_0/\Phi = +15$ cm. Ici $\Phi = (2n - n_0 - 1)/R$, où n et n_0 sont les indices du verre et de l'eau. Les points nodaux coïncident et sont situés dans l'eau à la distance $x = f' + f = 3{,}7$ cm de la lentille.

4.51. Voir la fig. 224.

4.54. a) Puissance optique du système : $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2 = +4\delta$, distance focale est égale à 25 cm. Les deux plans principaux sont situés devant

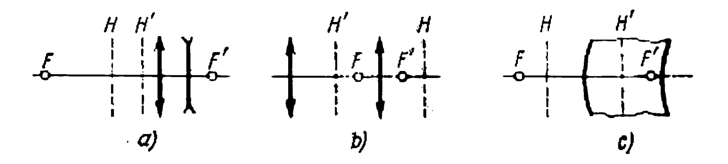


Fig. 224

la lentille convergente: le plan avant à la distance 10 cm de la lentille convergente, celui arrière, à la distance 10 cm de la lentille divergente ($x = d\Phi_2/\Phi$ et $x' = -d\Phi_1/\Phi$). b) $d = 5$ cm, environ 4/3.

4.55. Puissance optique de la lentille donnée: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - (d/n)\Phi_1\Phi_2$, $x = d\Phi_2/n\Phi = 5{,}0$ cm, $x' = -d\Phi_1/n\Phi = 2{,}5$ cm, i.e. les deux plans princi-

paux sont situés en dehors de la lentille du côté de la face convexe de cette dernière.

4.56. La lentille doit être placée dans le plan principal objet du système, i.e. à la distance $x = f_1 d/(f_1 + f_2 - d)$ de la première lentille.

4.57. $\Phi = 2\Phi' - 2(l/n_0)\Phi'^2 = 3{,}0\delta$, où $\Phi' = (2n - n_0 - 1)/R$.

4.58. a) $d = n\Delta R/(n-1) = 4{,}5$ cm ; b) $d = 3{,}0$ cm.

4.59. a) $\Phi = d(n-1)^2/nR^2 > 0$, les plans principaux distants de d se trouvent du côté de la face convexe, le plan principal objet étant éloigné de la face convexe de la lentille à la distance $R/(n-1)$; b) $\Phi = (1/R_2 - 1/R_1)(n-1)/n < 0$; les deux plans principaux passent par le centre de courbure commun des faces de la lentille.

4.60. $d = n(R_1 + R_2)/2(n-1) = 9{,}0$ cm, $\Gamma = R_1/R_2 = 5{,}0$.

4.61. $\Phi = 2(n^2 - 1)/n^2 R = 37\delta$.

4.63. $3\cdot10^7$ m ; $1{,}6\cdot10^{-7}$ m^{-1}.

4.65. $1{,}9\ a$.

4.66. Représentons la k-me vibration sous la forme complexe

$$\xi_k = ae^{i[\omega t + (k-1)\vartheta]} = a_k^* e^{i\omega t},$$

où $a_k^* = ae^{i(k-1)\vartheta}$ est l'amplitude complexe. L'amplitude complexe de la vibration résultante sera alors

$$A^* = \sum_{k=1}^{N} ae^{i(k-1)\vartheta} = a\,[1 + e^{i\vartheta} + e^{i2\vartheta} + \ldots + e^{i(N-1)\vartheta}],$$

soit

$$A^* = a\,(e^{i\vartheta N} - 1)/(e^{i\vartheta} - 1).$$

En multipliant A^* par son conjugué complexe et en extrayant ensuite la racine carrée, on obtient l'amplitude réelle

$$A = a\sqrt{\frac{1-\cos N\vartheta}{1-\cos\vartheta}} = a\,\frac{\sin(N\vartheta/2)}{\sin(\vartheta/2)}.$$

4.67. a) $\cos\vartheta = (k - \varphi/2\pi)\lambda/d$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; b) $\varphi = \pi/2 + k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $d/\lambda = (2k-1)/4$, $k = 1, 2, \ldots$

4.68. $\Delta\varphi = 2\pi\,[k - (d/\lambda)\sin(\omega t + \alpha)]$, où $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

4.69. $\lambda = 2\Delta x\cdot\Delta h/l\,(n-1) = 0{,}6\mu$.

4.71. a) $\Delta x = \lambda(b + r)/2\alpha r = 1{,}1$ mm ; $N = 2b\alpha/\Delta x + 1 = 9$; b) le déplacement de l'image $\delta x = (b/r)\,\delta l = 13$ mm ; c) l'image est encore nette pour $\delta x \approx \Delta x/2$, d'où $\delta_{max} = (1 + r/b)\lambda/4\alpha = 43\ \mu$.

4.72. $\lambda = 2\alpha\Delta x = 0{,}64\mu$.

4.73. a) $\Delta x = \lambda f/a = 0{,}15$ mm, 13 maxima ; b) les franges sont encore nettes si $\delta x \leqslant \Delta x/2$ où δx est le déplacement des franges d'interférence dues aux éléments du bord de la fente, d'où $\delta_{max} = \lambda f^2/2ab = 37\mu$.

4.74. $\lambda = 2\alpha\vartheta(n-1)\Delta x/(a+b) = 0{,}6\mu$.

4.75. $\Delta x \approx \lambda/2\vartheta(n - n') = 0{,}20$ mm.

4.76. Les franges se déplacent du côté de la fente cachée de la distance $\Delta x = hl(n-1)/d = 2{,}0$ mm.

4.77. $n' = n + N\lambda/l = 1{,}000377$.

4.78. a) Soit $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}'$ et $\mathbf{E}''$ les vecteurs correspondant aux ondes incidente, réfléchie et réfractée. La continuité de la composante tangentielle sur la surface de séparation conduit à

$$E_\tau - E'_\tau = E'_\tau. \qquad (1)$$

La densité de flux d'énergie $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ et comme $H\sqrt{\mu\mu_0} = E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}$, ou $U \sim nE$, $n = \sqrt{\varepsilon}$ étant l'indice de réfraction, alors $S \sim nE^2$ si bien qu'en vertu du principe de la conservation de l'énergie

$$n_1 E_\tau^2 = n_2 E'^2_\tau + n_2 E''^2_\tau \qquad (2)$$

En éliminant E'_τ entre (1) et (2), il vient

$$E''_\tau = \frac{2n_1}{n_1+n_2} E_\tau. \qquad (3)$$

D'où l'on voit que E''_τ et E_τ sont de même signe, autrement dit, sur la surface de séparation les vibrations des vecteurs lumineux des ondes correspondantes sont toujours en phase. b) Il découle de (1) et de (3) que

$$E'_\tau = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} E_\tau,$$

i.e. pour $n_2 > n_1$ E'_τ et E_τ sont de signes opposés, ce qui signifie que l'onde réfléchie subit un changement de phase de π. Si $n_2 < n_1$, la phase ne varie pas.

4.79. $d = (1+2k)\lambda/4\sqrt{n^2-\sin^2 i_1} = 0{,}14\,(1+2k)\,\mu$, où $k=0, 1, 2,\ldots$

4.80. 0,65 μ.

4.81. $d=(1+2k)\lambda/4\sqrt{n}$, où $k=0, 1, 2,\ldots$

4.82. $\lambda=\lambda\sqrt{n^2-\sin^2 i}/\sin 2i\delta i=15\mu$.

4.83. $\lambda \approx d\,(r_i^2-r_k^2)/4\pi l^2\,(i-k)$.

4.84. $\Delta x=\lambda\,(\cos i)/2\alpha\sqrt{n^2-\sin^2 i}$.

4.85. a) $\alpha=\lambda/2n\,\Delta x=3'$; b) $\Delta\lambda/\lambda \approx \Delta x/l=0{,}014$.

4.86. $\Delta r \approx R\lambda/4r$.

4.87. $r'=\sqrt{r^2-R\,\Delta h}=1{,}5$ mm.

4.88. $r_k=\sqrt{r_0^2+(2k-1)/2\,\lambda R}=3{,}8$ mm, $k=6$.

4.89. $\lambda=(d_2^2-d_1^2)/4R\,(k_2-k_1)=0{,}50\,\mu$, où k_1k_2 sont les numéros des anneaux sombres.

4.90. $\Phi=2\,(n-1)\,(2k-1)\,\lambda/d^2=2{,}4\delta$, où k est le numéro de l'anneau brillant.

4.91. a) $r=\sqrt{2k\lambda\,(n-1)/\Phi}=3{,}5$ mm ; b) $r'=r/\sqrt{n_0}=3{,}0$ mm.

4.92. $r=\sqrt{(1+2k)\,\lambda R/2n_2}=1{,}3$ mm, $k=5$.

4.93. $N = \lambda_1/2\,(\lambda_2-\lambda_1) = 140$.

4.94. $h = \lambda^2/2\Delta\lambda = 0{,}3$ mm.

4.95. a) Maxima de vibration pour $2d\cos i = k\lambda$; il s'ensuit qu'avec l'angle i croissant, i.e. avec le rayon des anneaux croissant (voir la fig. 165) l'ordre d'interférence k décroît. b) En prenant la différentielle des deux membres de l'égalité précédente et en tenant compte de ce que k varie de l'unité en passant d'un maximum au suivant, il vient: $\delta i = \lambda/2d\sin i$; il en résulte que la largeur angulaire des franges diminue avec l'angle i croissant, i.e. avec l'ordre d'interférence décroissant.

4.96. a) $k_{max} = 2d/\lambda = 1{,}0\cdot10^5$; b) $\Delta\lambda = \lambda/k = \lambda^2/2d = 5$ pm.

4.97. $$I_0=\frac{2}{bN\lambda}\int_0^\infty I(r)\,r\,dr.$$

4.98. $b=br^2/(m\lambda a-r^2)=2$ m.

4.99. $\lambda=(r_2^2-r_1^2)\,(a+b)/2ab=0{,}60\,\mu$.

4.100. a) $I \approx 4I_0$, $I \approx 2I_0$; b) $I \approx I_0$.

4.101. a) $I \approx 0$; b) $I \approx I_0/2$.

4.102. a) $I_1 \approx 9I_0/16$, $I_2 \approx I_0/4$, $I_3 \approx I_0/16$, $I_4=I_2$, $I \approx (1-\varphi/2\pi)^2 I_0$; b) $I_5 \approx 25I_0/16$, $I_6 \approx 9I_0/4$, $I_7 \approx 49I_0/16$, $I_8=I_6$, $I \approx (1+\varphi/2\pi)^2 I_0$. Ici φ est l'angle caché par l'écran.

4.103. a) $d = \lambda\,(k+3/8)/(n-1) = 1{,}2\,(k+3/8)\,\mu$; b) $d = 1{,}2\,(k+7/8)\,\mu$; c) $d = 1{,}2k$ ou $1{,}2\,(k+3{,}4)\,\mu$. Ici $k = 0, 1, 2, \ldots$

4.104. a) $h = \lambda\,(k+3/4)/(n-1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; b) $I_{max} \approx 8I_0$.

4.105. $h_{min} \approx \lambda (k + 5/8)/(n - 1)$ - 2,5 μ, où $k = 2$.

4.106. $r = \sqrt{k\lambda f b/(b-f)} = 0{,}90 \sqrt{k}$ mm, où $k = 1, 3, 5, \ldots$

4.107. $b' = b/\eta^2 = 1{,}0$ m.

4.108. a) $y' = yb/a = 9$ mm; b) $h \approx ab\lambda/D(a + b) = 0{,}10$ mm.

4.109. $f = ab/(a + b) = 0{,}6$ m. Cette valeur correspond au foyer principal; il y en a d'autres.

4.110. a) $h = 0{,}60\,(2k + 1)$ μ; b) $h = 0{,}30\,(2k + 1)$ μ. Ici $k = 0, 1, 2, \ldots$

4.111. a) $I_{max}/I_{min} \approx 1{,}7$; b) $\lambda = 2\,(\Delta x)^2/b\,(v_2 - v_1)^2 = 0{,}6$ μ, où v_1 et v_2 sont les valeurs correspondantes du paramètre v sur la spirale de Cornu.

4.112. $I_{milieu}/I_{bord} \approx 2{,}6$.

4.113. $\lambda = (\Delta h)^2/2b\,(v_2 - v_1)^2 \approx 0{,}55$ μ, où v_1 et v_2 sont les valeurs correspondantes du paramètre v sur la spirale de Cornu.

4.114. $h \approx \lambda (k + 3/4)/(n - 1)$, où $k = 0, 1, 2, \ldots$, n est l'indice de réfraction du verre.

4.115. $I_2/I_1 \approx 1{,}9$.

4.116. $I \approx 2{,}8\ I_0$.

4.117. $I_1 : I_2 : I_3 \approx 1 : 4 : 7$.

4.118. $I \approx I_0$.

4.119. $I_\vartheta = I_0 \dfrac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$, où $\alpha = \dfrac{\pi b}{\lambda} \sin \vartheta$; $b \sin \vartheta = k\lambda$, où $k = 1, 2, 3, \ldots$

4.120. La condition du maximum conduit à l'équation transcendante $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$, où $\alpha = (\pi b/\lambda) \sin \vartheta$. En résolvant cette équation (graphiquement ou approximativement), on obtient les racines suivantes: $\alpha_1 = 1{,}43\pi$, $\alpha_2 = 2{,}46\pi$, $\alpha_3 = 3{,}47\pi$. D'où

$$b \sin \vartheta_1 = 1{,}43\lambda;\quad b \sin \vartheta_2 = 2{,}46\lambda;\quad b \sin \vartheta_3 = 3{,}47\lambda.$$

4.121. $b\,(\sin \vartheta' - \sin \vartheta)\ k\lambda$; pour $k = +1$ et $k = -1$ les angles ϑ' sont respectivement 33° et 27°.

4.122. a) $\varphi_0 = \arcsin (n \sin \vartheta) - \vartheta = 7{,}9°$; b) la condition $b\,(\sin \varphi_1 - n \sin \vartheta) = \pm\lambda$ conduit à $\Delta\varphi = \varphi_{+1} - \varphi_{-1} = 7{,}3°$.

4.123. $\lambda \approx (\vartheta^2 - \vartheta_0^2)\,d/2k = 0{,}6$ μ.

4.125. 55°.

4.126. 2,8 μ.

4.127. $\lambda = d\,(\sin \Delta\vartheta)/\sqrt{5 - 4 \cos \Delta\vartheta} = 0{,}54$ μ.

4.128. a) 45°; b) 64°.

4.129. $x = 2R/(n-1) \sqrt{(d/\lambda)^2 - 1} = 8$ cm.

4.130. La condition $d\,[n \sin \vartheta - \sin (\vartheta + \vartheta_k)] = k\lambda$ fournit: $\varphi_0 = -18{,}5°$, $\varphi_{+1} = 0°$; $k_{max} = +6$, $\varphi_{+6} = +78{,}5°$. Voir la fig. 225.

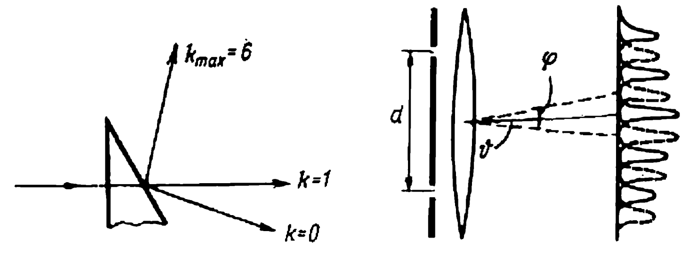


Fig. 225 Fig. 226

4.131. $h_k = \lambda\,(2k - 1)/2\,(n - 1)$, où $k = 1, 2, \ldots$; $\alpha \sin \vartheta_1$ $\lambda/2$.

4.132. $v = \lambda \nu f/\Delta x = 1{,}5$ km/s.

4.133. A chaque étoile correspond sa figure de diffraction dans le plan focal de l'objectif, l'écart angulaire de leurs maxima d'ordre zéro étant ϑ (fig. 226). La diminution de d entraîne l'augmentation de l'écart angulaire φ

des maxima voisins dans chacune des figures de diffraction. Lorsque φ devient égal à 2ϑ, il se produit le premier brouillage des franges: les maxima d'un système de franges se superposent avec les minima de l'autre. Ainsi la condition $\varphi = 2\vartheta$ et la formule $\sin\varphi = \lambda/d$ amènent à $\vartheta \approx \lambda/2d = 0{,}06''$.

4.134. a) $D = k/d\sqrt{1-(k\lambda/d)^2} = 6{,}5$ mn ang./nm, où $k = 2$; b) $D = k/d \times \times\sqrt{1-(k\lambda/d-\sin\vartheta_0)^2} = 13$ mn ang./nm, où $k = 4$.

4.135. $d\vartheta/d\lambda = (\operatorname{tg}\vartheta)/\lambda$.

4.136. $\Delta\vartheta = 2\lambda/Nd\sqrt{1-(k\lambda/d)^2} = 11''$.

4.139. $\vartheta = 46$.

4.140. a) Dans le quatrième; b) $\delta\lambda_{\min} \approx \lambda^2/l = 7$ pm.

4.141. a) 0,05 mm; b) 6 cm.

4.142. a) 6 et 12 μ; b) non, dans le premier ordre; oui, dans le second.

4.143. D'après Rayleigh, le maximum de la raie de longueur d'onde λ doit coïncider avec le premier minimum de la raie $\lambda + \delta\lambda$. Ecrivons les deux conditions pour l'angle de déviation minimale en différences de marche optique des rayons extrêmes (voir la fig. 175):

$$bn - (DC + CE) = 0, \quad b\,(n + \delta n) - (DC + CE) = \lambda + \delta\lambda.$$

D'où $b\delta n \approx \lambda$. La suite en est évidente.

4.144. a) $\lambda/\delta\lambda = 2bB/\lambda^3$; respectivement $1{,}2\cdot10^4$ et $0{,}35\cdot10^4$; b) 1,0 cm.

4.145. Environ 20 cm.

4.146. $R = 1/\psi_{\text{lim}} = D/1{,}22\lambda = 7\cdot10^4$.

4.147. Environ 50 m.

4.148. Soit ψ_{lim} et ψ'_{lim} les distances angulaires minimales distinguées respectivement à l'objectif de la lunette et à l'œil ($\psi_{\text{lim}} = 1{,}22\lambda/D$, $\psi'_{\text{lim}} = = 1{,}22\lambda/d$). Alors le grossissement recherché de la lunette $\Gamma_{\min} = \psi'_{\text{lim}}/\psi_{\text{lim}} = = D/d = 13$.

4.149. $d = 0{,}61\lambda/\sin u = 1{,}4$ μ.

4.150. Soit d la distance minimale résoluble à l'objectif du microscope, ψ l'angle sous lequel on voit l'objet (d) à la distance de la meilleure vision L (25 cm) et ψ'_{lim}, la distance angulaire minimale résoluble à l'œil ($\psi'_{\text{lim}} = 1{,}22\lambda/d_0$). Le grossissement recherché du microscope $\Gamma_{\min} = \psi'_{\text{lim}}/\psi = (2L/d_0)\sin u = 30$.

4.151. 26, 60, 84, 107 et 134°.

4.152. $a = 0{,}28$ nm, $b = 0{,}41$ nm.

4.153. Soit α, β et γ les angles que fait la direction menée au maximum de diffraction avec les directions du réseau le long des périodes a, b et c respectivement. Les valeurs de ces angles se définissent alors à partir des conditions: $a\,(1 - \cos\alpha) = k_1\lambda$, $b\cos\beta = k_2\lambda$ et $c\cos\gamma = k_3\lambda$. Comme $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + + \cos^2\gamma = 1$, il vient

$$\lambda = \frac{2k_1/a}{(k_1/a)^2 + (k_2/b)^2 + (k_3/c)^2}.$$

4.154. 244 pm.

$$\textbf{4.155.}\quad d = \frac{\lambda}{2\sin(\alpha/2)}\sqrt{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2\cos\frac{\alpha}{2}} = 0{,}28 \text{ nm},$$

où k_1 et k_2 sont les ordres de réflexion.

4.156. $r = l\operatorname{tg}2\vartheta = 3{,}5$ cm, ϑ étant l'angle de glissement défini par la condition $2d\sin\vartheta = k\lambda$.

4.157. $I_0/4$.

4.158. a) I_0; b) $2I_0$.

4.159. $P = (\sin^2\vartheta)/(1 + \cos^2\vartheta)$.

4.160. a) $\rho = (n-1)^2/(n+1)^2 = 0{,}040$; b) $\Delta\Phi/\Phi = 1 - (1-\rho)^{2N} = = 0{,}34$, où N est le nombre de lentilles.

4.162. a) 0,83; b) 0,044.

4.163. 90°.

4.164. a) $\rho=\frac{1}{2}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2=0{,}074$; b) $P=\frac{I_{\parallel}-I_{\perp}}{I_{\parallel}+I_{\perp}}=\frac{\rho}{1-\rho}=$
$=\frac{(1+n^2)^2-4n^2}{(1+n^2)^2+4n^2}=0{,}080$. Ici n est l'indice de réfraction du verre.

4.165. $I=I_0(1-\rho)/n=0{,}72I_0$.

4.166. $\rho=[(n^2-1)^2/(n^2+1)^2]\sin^2\varphi=0{,}038$.

4.167. $P_1=P_3=1{,}0$; $P_2=\frac{\rho}{1-\rho}=0{,}087$; $P_4=\frac{1-(1-2\rho)^2}{1+(1-2\rho)^2}=0{,}17$.

4.168. a) Dans ce cas le facteur de réflexion sur chaque face $\rho=$ $=(n^2-1)^2/(n^2+1)^2$ de sorte que

$$I_4=I_0(1-\rho)^2=16I_0n^4/(1+n^2)^2=0{,}725I_0;$$

b) $P=\frac{I_{\parallel}-I_{\perp}}{I_{\parallel}+I_{\perp}}=\frac{1-(1-\rho')^2}{1+(1-\rho')^2}=\frac{(1+n^2)^4-16n^4}{(1+n^2)^2+16n^4}\approx 0{,}16,$

ρ' étant le facteur de réflexion de la composante lumineuse dont le vecteur lumineux vibre perpendiculairement au plan d'incidence.

4.169. a) $P=(1-\alpha^{4N})/(1+\alpha^{4N})$, où $\alpha=2n/(1+n^2)$, n est l'indice de réfraction ; b) respectivement 0,16 ; 0,31 ; 0,67 et 0,92.

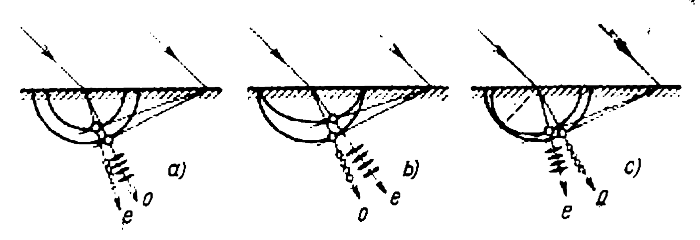


Fig. 227

4.170. Voir la fig. 227, *o* et *e* étant les rayons ordinaire et extraordinaire

4.171. $\delta\approx 11°$.

4.172. $\eta=(1/2)\ (\cos\alpha)^{2(N-1)}=0{,}12$.

4.173. $I_0/I=2/\tau^3\cos^4\alpha=6\cdot 10$.

4.174. $I_{pol}/I_{nat}=P/(1-P)=0{,}3$.

4.175. $P=(\eta-1)/(1-\eta\cos 2\alpha)=0{,}8$.

4.176. a) Représentons la lumière naturelle sous la forme de deux composantes orthogonales, d'intensité I_0 chacune. Supposons que chaque polariseur laisse passer dans son plan la portion α_1 de la lumière dont le plan d'oscillations est parallèle au plan du polariseur, et dans le plan perpendiculaire, la portion α_2. Alors, l'intensité de la lumière passée par le système sera $I_{\parallel}=\alpha_1^2I_0+\alpha_2^2I_0$ pour les polariseurs ayant leurs plans parallèles et $I_{\perp}=\alpha_1\alpha_2I_0+\alpha_2\alpha_1I_0$ pour les plans perpendiculaires, de plus $I_{\parallel}/I_{\perp}=\eta$ par hypothèse. D'autre part, le degré de polarisation assuré par chaque polariseur séparément est $P_0=$ $=(\alpha_1-\alpha_2)/(\alpha_1+\alpha_2)$. En éliminant α_1 et α_2 entre ces deux formules, il vient

$P_0=\sqrt{(\eta-1)/(\eta+1)}=0{,}905$.

b) $P=\sqrt{\eta^2-1}/\eta=0{,}995$.

4.177. Les variations relatives des intensités des deux faisceaux dans les cas A et B sont égales à $(\Delta I/I)_A=4\operatorname{cotg}(\alpha/2)\cdot\delta\varphi$, $(\Delta I/I)_B=4\operatorname{tg}(\alpha/2)\cdot\delta\varphi$. D'où $\eta=(\Delta I/I)_A/(\Delta I/I)_B=\operatorname{cotg}^2(\alpha/2)$, $\alpha=11{,}5°$.

4.178. Pour le système dextrogyre :

1) circulaire, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre en regardant l'onde venir ;

2) elliptique, dans le sens des aiguilles d'une montre en regardant l'onde venir; le grand axe de l'ellipse coïncide avec la droite $y = x$;

3) la polarisation plane le long de la droite $y = -x$.

4.179. a) 0,490 mm; b) 0,475 mm.

4.180. $\lambda = 4d\Delta n/(2k+1)$; 0,58; 0,55 et 0,51 μ respectivement pour $k = 15$, 16 et 17.

4.181. Quatre.

4.182. 0,69 et 0,43 μ.

4.183. $d = (2k-1)\lambda_1/2\Delta n = 0{,}25$ mm, où $k = 4$.

4.184. $\Delta n = \lambda/\vartheta\Delta x = 0{,}009$.

4.185. Désignons par $I_\perp$ et par $I_\parallel$ les intensités de la lumière transmise respectivement par les polaroïds croisés et parallèles. Alors,

$$I_\perp = (I_0/2)\sin^2 2\alpha\cdot\sin^2(\delta/2),$$

$$I_\parallel = (I_0/2)\,[1-\sin^2 2\alpha\cdot\sin^2(\delta/2)].$$

Conditions de maximum et de minimum

Polaroïds	I_{max}	I_{min}
⊥	pour $\Delta=(2k+1)\lambda/2$, $\alpha=\pi/4$	pour $\Delta=k\lambda$, tout α
‖	pour $\Delta=k\lambda$, tout α	pour $\Delta=(2k+1)\lambda/2$, $\alpha=\pi/4$

Ici Δ est la différence de marche optique des rayons ordinaire et extraordinaire, $k = 0, 1, 2, \ldots$

4.187. a) La lumière à polarisation circulaire dextrogyre (pour un observateur) ayant traversé la lame quart d'onde devient polarisée linéairement, la direction des vibrations du vecteur lumineux faisant un angle $+45°$ avec

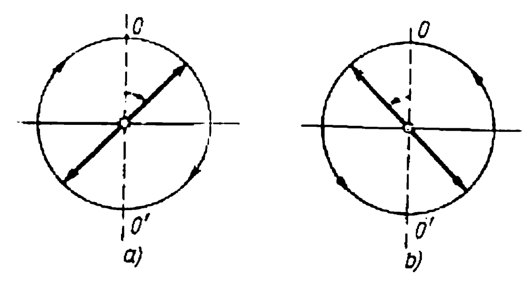


Fig. 228

l'axe du cristal (fig. 228,a); pour la lumière de polarisation lévogyre cet angle sera $-45°$ (fig. 228,b). b) Si lors de la rotation du polaroïd (disposé derrière la lame) l'intensité de la lumière transmise ne varie pas quelle que soit l'orientation de la lame, la lumière est naturelle; si elle varie et s'annule, la lumière est polarisée circulairement; si elle varie sans s'annuler, la lumière est un mélange de lumière naturelle avec celle polarisée circulairement.

4.188. a) $\Delta x = \lambda/2\,(n_e - n_0)\,\vartheta$; b) $d\,(n_0' - n_e^\circ) = -2\,(n_e - n_0)\,\vartheta\delta x <$ < 0.

4.189. $\Delta n = \alpha\lambda/\pi = 0{,}71\cdot10^{-4}$, α étant la constante de rotation.

4.190. $\alpha = \pi/\Delta x \operatorname{tg} \vartheta = 21$ degré ang./mm, $I(x) \sim \cos^2(\pi x/\Delta x)$, où est la distance du maximum.

4.191. $d_{\min} = (\arcsin \sqrt{2\eta})/\alpha = 3{,}0$ mm.

4.192. 8,7 mm.

4.193. $[\alpha] = 72$ degré ang./(dm·g/cm³).

4.194. a) $E_{\min} = 1/2 \sqrt{Bl} = 10{,}6$ kV/cm; b) $2{,}2 \cdot 10^8$ interruptions par seconde.

4.195. $\Delta n = 2cHV/\omega$.

4.196. $V = (\varphi_1 - \varphi_2)/2lH = 0{,}012$ degré ang./(Œ·cm).

4.197. Si l'on voit la lumière émergente cheminer vers soi et qu'on prenne le sens des aiguilles d'une montre pour positif, on a $\varphi = (\alpha - VNH)/l$, où N est le nombre de traversées du rayon par la substance (sur la fig. 182, $N = 5$).

4.198. $H_{\min} = \pi/4Vl = 4{,}0$ kA/m, où V est la constante de Verdet. Le sens de transmission de la lumière changera à l'opposé.

4.199. $t = mc\omega_0/\lambda I = 12$ h. Tout en étant extrêmement faible, cet effet s'observe néanmoins tant pour la lumière visible que pour les ondes centimétriques.

4.200. a) $a = eE_0/m\omega^2 = 5 \cdot 10^{-16}$ cm, $v = a\omega = 1{,}7$ cm/s; b) $f_m/f_e = 2{,}9 \cdot 10^{-11}$.

4.201. a) $\varepsilon = 1 - n_0e^2/\varepsilon_0 m\omega^2$; $r = c\sqrt{1 + (n_0e^2/4\pi^2\varepsilon_0 mc^2)\lambda^2}$.

4.202. $n_0 = (4\pi^2\nu_m^2\varepsilon_0/e^2)(1 - n^2) = 2{,}4 \cdot 10^7$ cm⁻³.

4.203. $n - 1 = -n_0e^2\lambda^2/8\pi^2\varepsilon_0 mc^2 = -5{,}4 \cdot 10^{-7}$, où n_0 est la concentration des électrons dans le carbone.

4.204. a) $x = a\cos(\omega t + \varphi)$, où a et φ sont définis par les formules:

$$a = \frac{eE_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Ici $\beta = \gamma/2m$, $\omega_0^2 = k/m$, m étant la masse de l'électron.

b) $\langle P \rangle = \frac{m\beta(eE_0/m)^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$, $\langle P \rangle_{\max} = \frac{m}{4\beta}\left(\frac{eE_0}{m}\right)^2$ pour $\omega = \omega_0$.

4.205. Ecrivons l'équation de l'onde sous la forme $A = A_0e^{i(\omega t - kx)}$, où $k = 2\pi/\lambda$. Si $n' = n + i\varkappa$, alors $k = (2\pi/\lambda_0)n'$ et

$$A = A_0e^{2\pi\varkappa x/\lambda_0}e^{i[\omega t - 2\pi nx/\lambda_0]},$$

soit, en prenant la partie réelle,

$$A - A_0e^{\varkappa' x}\cos(\omega t - k'x),$$

d'où il vient que la lumière se propage sous forme d'une onde plane dont l'amplitude est une fonction de x. Pour $\varkappa < 0$ l'amplitude décroît (amortissement de l'onde causé par l'absorption). Si $n' = i\varkappa$, on a

$$A = A_0e^{\varkappa x}\cos\omega t.$$

C'est une onde stationnaire dont l'amplitude décroît exponentiellement. Dans ce cas la lumière subit la réflexion totale dans le milieu (sans absorption).

4.206. $n_0 = 4\pi^2\varepsilon_0 mc^2/e^2\lambda_0^2 = 2{,}0 \cdot 10^9$ cm⁻³.

4.208. a) $u = 3v/2$; b) $u = 2v$; c) $u = v/3$.

4.209. $\varepsilon = 1 + A/\omega^2$, où A est une constante.

4.210. $v = c/n = 1{,}83 \cdot 10^8$ m/s; $u = [1 + \lambda/n)(dn/d\lambda)]\, c/n = 1{,}70 \cdot 10^8$ m/s.

4.211. Il suffit de discuter le cas de trois composantes harmoniques de l'impulsion d'onde (le plus simple à l'aide du graphique).

4.212. $I = (I_0/2)\,e^{-\varkappa l}\sin^2\varphi$, où $\varphi = VlH$.

4.213. a) $I = I_0(1-\rho)^2(1 + \rho^2 + \rho^4 + \ldots) = I_0(1-\rho)^2/(1-\rho^2)$; b) $I = I_0 \times (1-\rho)^2\sigma(1 + \sigma^2\rho^2 + \sigma^4\rho^4 + \ldots) = I_0\sigma(1-\rho)^2/(1-\sigma^2\rho^2)$, où $\sigma = e^{-\varkappa d}$.

4.214. $\varkappa = (d_2 - d_1)^{-1}\ln(D_1/D_2) = 0{,}35$ cm⁻¹.

4.215. $\varkappa = (lN)^{-1} \ln [(1-\rho)^{2N}/\eta] = 0{,}034\ \text{cm}^{-1}$.

4.216. $\tau = (1-\rho)^2 e^{-(\varkappa_1+\varkappa_2)l/2}$.

4.217. $I = I_0 (1-\rho)^2 (e^{-\varkappa_1 l} - e^{-\varkappa_2 l})/l (\varkappa_2 - \varkappa_1)$.

4.218. $\Delta\lambda = 2\lambda_0 \sqrt{(\ln \eta)/\alpha d}$.

4.219. $I = [(\Phi/4\pi r_2^2)(1-\rho)^2 e^{-\varkappa(r_2-r_1)}$.

4.220. Diminuera de $e^{\mu d} = 0{,}6 \cdot 10^2$ fois.

4.221. 0,3 mm.

4.222. $d = (\ln 2)/\mu = 8$ mm.

4.223. $N = (\ln \eta)/\ln 2 = 5{,}6$.

4.224. $c = 2lz(n_2 - n_1) = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s.

4.225. Il est à noter tout d'abord que pour $v \ll c$ le temps s'écoule pratiquement de la même façon dans les référentiels liés à la source et au récepteur. Supposons que la source émet de courtes impulsions tous les T_0. On mesurera alors, dans le référentiel lié au récepteur, la distance des deux impulsions consécutives le long de la ligne d'observation égale à $\lambda = cT_0 - v_r T_0$, où v_r est la vitesse de rayon de la source: $v_r = v \cos \vartheta$. La fréquence des impulsions reçues $\nu = c/\lambda = \nu_0/(1 - v_r/c)$, où $\nu_0 = 1/T_0$. D'où $(\nu - \nu_0)/\nu_0 = (v/c) \cos \vartheta$.

4.226. $\Delta\lambda = -\lambda \sqrt{2T/mc^2} \cos \vartheta = -26$ nm.

4.227. $T = 4\pi R\lambda/c\delta\lambda = 25$ jours, où R est le rayon du Soleil.

4.228. $d = (\Delta\lambda/\lambda)_m c\tau/\pi = 3 \cdot 10^7$ km, $m = (\Delta\lambda/\lambda)_m^3 c^3\tau/2\pi\gamma = 2{,}9 \cdot 10^{29}$ kg, où γ est la constante de la gravitation universelle.

4.229. $\omega = \omega_0 (1+\beta)/(1-\beta)$, où $\beta = V/c$; $\omega \approx \omega_0 (1 + 2V/c)$.

4.230. $v = \lambda \Delta\nu/2 = 9{,}0 \cdot 10^2$ km/h.

4.231. Ayant substitué les quantités t' et x' (tirées de la transformation de Lorentz) dans l'égalité $\omega t - kx = \omega' t' - k'x'$, il vient

$$\omega = \omega' (1+\beta)/\sqrt{1-\beta^2}; \quad k = k' (1+\beta)/\sqrt{1-\beta^2},$$

où $\beta = V/c$. On tient compte de ce que $\omega' = ck'$.

4.232. De la formule $\omega' = \omega \sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}$ on obtient $\beta = v/c = 0{,}26$.

4.233. $v = c \dfrac{(\lambda/\lambda')^2 - 1}{(\lambda/\lambda')^2 + 1} = 7{,}1 \cdot 10^4$ km/s.

4.234. $\omega = \omega_0 \sqrt{3/7}$.

4.235. $\Delta\lambda = \lambda T/m_0 c^2 = 0{,}70$ nm, où m est la masse de l'atome.

4.236. a) $\omega = \omega_0/\sqrt{1-\beta^2} = 5{,}0 \cdot 10^{10}$ rd/s; b) $\omega = \omega_0 \sqrt{1-\beta^2} = 1{,}8 \cdot 10^{10}$ rd/s. Ici $\beta = v/c$.

4.237. La charge de l'électron et la charge positive induite dans le métal forment un dipôle. Dans le référentiel lié à l'électron, le moment électrique du dipôle varie avec la période $T' = d'/v$, où $d' = d\sqrt{1-(v/c)^2}$. La fréquence « propre » respective $\nu' = v/d'$. Par effet Doppler la fréquence observée est

$$\nu - \nu' \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1-(v/c)\cos\vartheta} = \frac{v/d}{1-(v/c)\cos\vartheta}.$$

Il lui correspond une longueur d'onde $\lambda = c/\nu = d(c/v - \cos \vartheta)$. Pour $\vartheta = 45°$ et $v \approx c$, $\lambda = 0{,}6$ μ.

4.238. 1) Soit v_x la projection du vecteur vitesse de l'atome émetteur sur la direction de la ligne d'observation. Le nombre d'atomes avec les projections v_x, $v_x + dv_x$

$$n(v_x)\, dv_x \sim e^{-mv_x^2/2kT}\, dv_x.$$

La pulsation de la lumière émise par les atomes animés de la vitesse v_x est $\omega = \omega_0 (1 + v_x/c)$. En s'aidant de cette expression on trouve la distribution

des atomes selon les pulsations : $n(\omega)\,d\omega = n(v_x)\,dv_x$. Enfin, on tient compte de ce que l'intensité spectrale du rayonnement $I_\omega \sim n(\omega)$.

2) $\Delta\omega/\omega_0 = 2\sqrt{2\ln 2\cdot kT/mc^2}$.

4.239. $u = \frac{c/n+V}{1+V/cn}$. Pour $V \ll c$, $u \approx \frac{c}{n} + V\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

4.240. $v = c\delta\vartheta/2 = 30$ km/s.

4.242. $\vartheta' = 8°$.

4.243. $I_1/I_2 = \mathrm{tg}^2(\omega l/c) = 3$.

4.244. a) Soit t l'instant où la particule se trouve en un point déterminé (x, y) de la circonférence, t', l'instant où le signal de cet événement arrive au point P. En désignant par y' les valeurs observées de la coordonnée y au point P (voir la fig. 186), on peut écrire :

$$t' = t + [l - x(t)]/c, \quad y'(t') = y(t).$$

L'accélération inconnue s'obtient par double différentiation de y' par rapport à t' :

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt'} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dt'};$$

$$\frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy'}{dt'}\right) = \frac{v^2}{R}\,\frac{v/c - y/R}{(1-yv/cR)^3},$$

où l'on tient compte de ce que $x = R\sin\omega t$, $y = R\cos\omega t$ et $\omega = v/R$.

b) La densité de flux d'énergie du rayonnement électromagnétique I est proportionnelle au carré de la composante y de l'accélération observée de la particule. D'où $I_1/I_2 = [(1+v/c)/(1-v/c)]^4$.

4.245. a) La particule chargée en mouvement excite, par son champ, les atomes du milieu, ces derniers devenant alors les sources des ondes lumineuses. Prenons deux points quelconques A et B sur le trajet de la particule. Les ondes

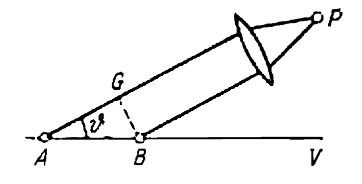


Fig. 229

issues de ces points affectés par la particule passante atteindront le point P (fig. 229) au bout du même temps et s'amplifieront si le temps que met l'onde lumineuse pour parcourir la distance du point A au point C est égal au temps que met la particule pour parcourir la distance AB. D'où il vient $\cos\vartheta = v/V$ où $v = c/n$ est la vitesse de phase de la lumière. On en déduit que le rayonnement n'est possible que pour $V > v$, i.e. lorsque la vitesse de la particule est supérieure à la vitesse de phase de la lumière dans le milieu.

b) $V = 0{,}78c$.

4.246. $T_2 = bT_1/(b + T_1\Delta\lambda) = 1{,}75$ kK.

4.247. 3,4 µ.

4.248. $5\cdot10^9$ kg/s, environ 10^{11} ans.

4.249. $t = (\eta^3 - 1)\,c\rho d/18\sigma T_0^3 = 3$ h.

4.250. $T_2 = T_1\sqrt{d/2l} = 4\cdot10^2$ K.

4.251. a) $c_V = (\partial U/\partial T)_V = 16\sigma T^3V/c = 0{,}03$ erg/K, où $U = 4\sigma T^4V/c$, σ la constante de Stefan-Boltzmann ; b) $S = 16\sigma T^3V/3c = 0{,}010$ erg/K.

4.252. a) $u_\omega = (kT/\pi^2c^3)\,\omega^2$; b) $u_\omega = (\hbar/\pi^2c^3)\,\omega^3e^{-\hbar\omega/kT}$.

4.253. $u_\nu = \frac{16\pi^2\hbar}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{2\pi\hbar\nu/kT}-1}$; $u_\lambda = 16\pi^2 c\hbar \frac{\lambda^{-5}}{e^{2\pi\hbar c/kT}-1}$.

4.254. $\Delta I = 4\pi^2 c^2 \hbar T^5 \Delta\lambda/b^5 (e^{2\pi\hbar c/kb}-1) = 0{,}31$ W/cm², où b est une constante dans la loi de déplacement de Wien.

4.255. a) 1,1 μ; b) 0,37; c) $I_2/I_1 = (T_2/T_1)^4 (1-y_2)/(1-y_1) = 4{,}9$.

4.256. $n_\omega \, d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 \, d\omega}{e^{\hbar\omega kT}-1}$, $n_\lambda \, d\lambda = 8\pi \frac{\lambda^{-4} \, d\lambda}{e^{2\pi\hbar c/kT}-1}$.

4.257. a) $j = P\lambda/8\pi^2 c\hbar r^2 = 6 \cdot 10^{13}$ cm⁻²·s⁻¹; b) $r = \sqrt{P\lambda 2\hbar n}/2\pi c = 9$ m.

4.258. $p = (E/c)\sqrt{1+\rho^2+2\rho\cos 2i} = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$ g·cm/s.

4.259. $p = (I/c)(1+\rho)\cos^2\vartheta = 6 \cdot 10^{-5}$ dyn/cm².

4.260. $F = \pi R^2 I/c = 1{,}8 \cdot 10^{-2}$ dyn.

4.261. a) $\Delta p = \frac{2\hbar\omega}{c} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}$; b) $\Delta p = \frac{2\hbar\omega}{c} \frac{1}{1-\beta}$. Ici $\beta = V/c$. On voit que dans le référentiel lié au miroir celui-ci reçoit une impulsion moindre.

4.262. $\sin(\vartheta/2) \approx E/mc\sqrt{gl}$, $\vartheta = 0{,}5°$.

4.263. $\Delta\omega/\omega_0 = -(1-e^{-\gamma M/Rc^2}) < 0$, i.e. la pulsation du photon diminue.

4.264. $V = (2\pi\hbar c/e\Delta\lambda)(1-1/\eta) = 16$ kV.

4.265. $V = \pi\hbar c/ed \sin\vartheta = 31$ kV.

4.266. $\lambda_{min} = 2\pi\hbar/mc(\gamma-1) = 2{,}8$ pm, où $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$.

4.267. 332 nm; $6{,}6 \cdot 10^5$ m/s.

4.268. $A = (2\pi c\hbar/\lambda_2)(\eta^2 - \lambda_2/\lambda_1)/(\eta^2-1) = 1{,}9$ eV.

4.269. 4,4 V.

4.270. $T_{max} = \hbar(\omega_0+\omega) - A_{extr} = 0{,}38$ eV.

4.271. $w = 2\pi c\hbar J/e\lambda = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$.

4.272. $6{,}4 \cdot 10^5$ m/s.

4.273. 0,5 V; son signe est contraire à celui de la tension extérieure.

4.274. $\hbar/mc$, c'est la longueur d'onde de Compton.

4.275. Ecrivons les lois de la conservation de l'énergie et de l'impulsion dans le référentiel lié à l'électron avant le choc avec le photon:

$$\hbar\omega + m_0 c^2 = mc^2, \ \hbar\omega/c = mv, \text{ où } m = m_0\sqrt{1-(v/c)^2}.$$

Il en découle que $v = 0$ ou c. Les deux résultats sont dépourvus de sens physique.

4.276. a) La diffusion se produit sur les électrons libres; b) on a l'accroissement du nombre d'électrons qui deviennent libres (on entend sous un électron libre celui dont l'énergie de liaison est notablement inférieure à l'énergie que lui transmet le photon);

c) la composante non déplacée est due à la diffusion sur les électrons et noyaux fortement liés.

4.277. $\lambda = [4\pi\Lambda/(\eta-1)][\sin^2(\vartheta_2/2) - \eta\sin^2(\vartheta_1/2)] = 1{,}2$ pm, où Λ est la longueur d'onde de Compton de l'électron.

4.278. $T = \varepsilon\eta/(1+\eta) = 0{,}20$ MeV.

4.279. a) $\omega' = 2\pi c/(\lambda + 2\pi\hbar/mc) = 5{,}3 \cdot 10^{20}$ rd/s; b) $T = (2\pi c\hbar/\lambda)/(1 + \lambda mc/2\pi\hbar) = 60$ keV.

4.280. $\hbar\omega' = \hbar\omega/[1 + 2(\hbar\omega/mc^2)\sin^2(\vartheta/2)] = 0{,}144$ MeV

4.281. $\lambda = (2\pi\hbar/mc)\left(\sqrt{1+2mc^2/T_{max}} - 1\right) = 3{,}7$ pm.

4.282. $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{4\pi\hbar/cm\Delta\lambda - 1}/(1+\hbar\omega/mc^2)$, $\varphi = 31°$.

4.283. $\rho = \frac{2\eta(1+\eta)}{1+2\eta} \frac{mc^2}{eB} = 3{,}4$ cm.

Partie 5

Physique atomique

5.1. $r = 3e^2/2E = 0{,}16$ nm ; $\lambda = (2\pi c/e)\sqrt{mr^3} = 0{,}24\ \mu$.
5.2. 0,73 pm.
5.3. a) 0,59 pm ; b) $r_{min} = (2Ze^2/T)(1 - m_\alpha/m_{Li}) = 0{,}034$ pm.
5.4. a) $\rho_{min} = (Ze^2/T)\operatorname{cotg}^2(\vartheta/2) = 0{,}23$ pm ; b) $r_{min} = (Ze^2/T)[1 + \operatorname{cosec} \times (\vartheta/2)] = 0{,}56$ pm.

5.5. $p \approx 2\sqrt{\dfrac{2mT}{1 + (2bT/Ze^2)^2}}$.

5.6. $b = \dfrac{Rn \sin(\vartheta/2)}{\sqrt{1 + n^2 - 2n\cos(\vartheta/2)}}$, où $n = \sqrt{1 + U_0/T}$.

5.7. a) $\cos(\vartheta/2) = b/(R + r)$; b) $dw = {}^1/_2 \sin\vartheta\, d\vartheta$; c) $w = 1/2$.
5.8. $3{,}3 \cdot 10^{-5}$.
5.9. $d = (4jr^2T^2/nIZ^2e^4)\sin^4(\vartheta/2) = 1{,}5\ \mu$; où n est la concentration des noyaux.
5.10. $Z_{Pt} = Z_{Ag}\sqrt{\eta A_{Pt}/A_{Ag}} = 78$.
5.11. a) $1{,}6 \cdot 10^6$; b) $N = \pi nd\,(Ze^2/T)^2 \operatorname{cotg}^2(\vartheta_0/2)\, I_0\tau = 2{,}0 \cdot 10^7$, où n est la concentration des noyaux.
5.12. $w = \pi nd\,(Ze^2/mv^2)^2 = 0{,}006$, n est la concentration des noyaux.
5.13. $\Delta N/N = 1 - \pi nZ^2e^4/T^2 \operatorname{tg}^2(\vartheta/2) = 0{,}6$.
5.14. $\Delta\sigma = \pi (Ze^2/T)^2 \operatorname{cotg}^2(\vartheta_0/2) = 0{,}73$ kbarn.
5.15. a) 0,9 MeV; $d\sigma/d\Omega = \Delta\sigma/4\pi \sin^4(\vartheta/2) = 0{,}64$ kbarn/sr.
5.16. $t = (3mc^3/2e^2\omega^2)\ln\eta = 15$ ns.
5.17. $t \approx m^2c^3r^3/4e^4 \sim 13$ ps.
5.18. 1,88; 0,657 et 0,487 μ.
5.19. $r_n = \sqrt{n\hbar/m\omega}$, $E_n = n\hbar\omega$, où $n = 1, 2, \ldots$, $\omega = \sqrt{k/m}$.
5.20.

	r_1, pm	v, 10^6 m/s	T, eV	E_{liais}, eV	V_i, V	V_1, V	λ, nm
H	52,9	2,18	13,6	13,6	13,6	10,2	121,5
He^+	26,5	4,36	54,5	54,5	54,5	40,8	30,4

5.21. $\omega = (me^4/\hbar^3)\, Z^2/n^3 = 2{,}07 \cdot 10^{16}$ rd/s.
5.22. $\mu_n = (e\hbar/2mc)\, n$, $\mu_n/M_n = e/2mc$, $\mu_1 = \mu_B$.
5.24. a) 657, 487 et 434 nm; b) $\lambda/\delta\lambda \approx 1{,}5 \cdot 10^3$.
5.25. $\sin\vartheta = (2 + n)^3\, \pi c/lR^*$, $\vartheta \approx 60°$.
5.26. He^+.
5.27. $N = n(n - 1)/2$.
5.28. $n = 5$.
5.29. $R = (88/15)/Z^2\Delta\lambda = 1{,}097 \cdot 10^5\ cm^{-1}$.
5.30. $Z = \sqrt{(176/15)\pi c/R^*\Delta\lambda} = 3$, Li^{++}.
5.31. $\lambda = (2\pi c/\Delta\omega)\left(Z\sqrt{R^*/\Delta\omega} - 1\right)^2/\left(2Z\sqrt{R^*/\Delta\omega} - 1\right) = 0{,}47\ \mu$.
5.32. $E = E_0 + 4\hbar R^* = 79$ eV.
5.33. $T_{min} = 3\hbar R^*/2 = 20{,}5$ eV.
5.34. $v = 3\hbar R^*/4mc = 3{,}25$ m/s, où m est la masse de l'atome.
5.35. $(\varepsilon - \varepsilon')/\varepsilon \approx 3\hbar R^*/8mc^2 = 0{,}55 \cdot 10^{-6}$ %, m étant la masse de l'atome.
5.36. $v = 2\sqrt{\hbar R^*/m} = 3{,}1 \cdot 10^6$ m/s, m étant la masse de l'électron.

5.37. $E_{\text{liais}} = (\mu e^4/2\hbar^2)/n^2$, $R^* = \mu e^4/2\hbar^3$, où μ est la masse réduite du système. Sans tenir compte du mouvement du noyau ces quantités pour l'atome d'hydrogène seront plus grandes de $m/M \approx 0{,}055\ \%$, m et M étant les masses de l'électron et du proton.

5.38. $E_D - E_H = 3{,}7$ MeV, $\lambda_H - \lambda_D = 33$ pm.

5.39. a) 0,285 pm, 2,53 keV, 0,65 nm; b) 106 pm, 6,8 eV, 0,243 μ.

5.40. Respectivement 123, 2,86 et 0,186 pm.

5.41. 0,45 keV.

5.42. Pour les deux particules $\lambda = (2\pi\hbar/\sqrt{2m_nT})\,(1 + m_n/m_d) = 8{,}6$ pm.

5.43. Trouvons d'abord la fonction de distribution des molécules par longueurs d'onde de de Broglie. De la relation $f(v)\,dv = -\varphi(\lambda)\,d\lambda$, où $f(v)$ est la fonction de distribution de Maxwell par vitesses, on tire

$$\varphi(\lambda) = A\lambda^{-4}e^{-a/\lambda^2},\quad a = 2\pi^2\hbar^2/mkT.$$

La condition $d\varphi/d\lambda = 0$ donne $\lambda_{\text{prob}} = \pi\hbar/\sqrt{mkT} = 0{,}09$ nm.

5.44. $\lambda = 2\pi\hbar/\sqrt{2mT\,(1 + T/2mc^2)}$, $T \lesssim 4mc^2\Delta\lambda/\lambda = 20{,}4$ keV (pour l'électron) et 37,5 MeV (pour le proton).

5.45. $v = 4\pi\hbar l/mb\,\Delta x = 9\cdot10^5$ m/s.

5.46. $\Delta x = 2\pi\hbar l/d\,\sqrt{2meV} = 4{,}9$ μ.

5.47. $V_0 = \pi^2\hbar^2/2me\,(\sqrt{\eta} - 1)^2\,d^2\sin^2\vartheta = 0{,}15$ keV.

5.48. $d = \pi\hbar k/\sqrt{2mT}\cos(\vartheta/2) = 0{,}21$ nm, où $k = 4$.

5.49. $d = \pi\hbar k/\sqrt{2mT}\sin\vartheta = 0{,}23 \pm 0{,}04$ nm, l'angle ϑ étant donné par la relation $\operatorname{tg} 2\vartheta = D/2l$.

5.50. $E_n = (\pi^2\hbar^2/2ml^2)\,n^2$, où $n = 1, 2, \ldots$

5.52. Respectivement $1\cdot10^4$, $1\cdot10$ et $1\cdot10^{-20}$ cm/s.

5.54. $T_{\min} \sim 2\hbar^2/ml^2 = 15$ eV. Ici on prend $p \sim \Delta p$ et $\Delta x = l/2$.

5.55. $T > 2\cdot10^2\hbar^2/ml^2$.

5.56. $F \approx 3\hbar^2/ml^3$.

5.57. L'élargissement du paquet d'onde est dû à la dispersion des vitesses ($\Delta v \approx \hbar/m\,\Delta x$). L'accroissement de sa largeur pendant le temps dt est $d(\Delta x) = \Delta v\cdot dt$. En intégrant cette équation il vient $\tau = \eta^2ml^2/2\hbar^2 \approx 0{,}4$ ps.

5.58. Comme $p \sim \Delta p \sim \hbar/\Delta x \sim \hbar/x$, on obtient $E = T + U \approx \hbar^2/2mx^2 + kx^2/2$. La condition $dE/dx = 0$ permet de déterminer x_0 et ensuite $E_{\min} \approx \hbar\sqrt{k/m} = \hbar\omega$, où ω est la pulsation de l'oscillateur. Le calcul exact donne $\hbar\omega/2$.

5.59. Comme $p \sim \Delta p \sim \hbar/\Delta r$ et $\Delta r \sim r$, il vient $E \approx p^2/2m - e^2/r \approx \hbar^2/2mr^2 - e^2/r$. De la condition $dE/dr = 0$ on tire $r_{\text{eff}} \approx \hbar^2/me^2 = 53$ pm, $E_{\min} \approx -me^4/2\hbar^2 = -13{,}6$ eV.

5.60. La largeur de l'image $\Delta = \delta + \Delta' \approx \delta + 2\hbar l/p\delta$, où Δ' est un élargissement supplémentaire dû à l'indétermination de l'impulsion Δp_y (en traversant la fente), p, l'impulsion des atomes d'hydrogène incidents. La fonction $\Delta(\delta)$ atteint son minimum pour $\delta \approx \sqrt{2\hbar l/mv} = 0{,}01$ mm.

5.61. On cherche la solution de l'équation de Schrödinger sous la forme $\Psi = \psi(x)\cdot f(t)$. En mettant cette fonction dans l'équation initiale et en séparant les variables v et t, on aboutit à deux équations. Leurs solutions $\psi(x) \sim e^{ikx}$, où $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, E est l'énergie de la particule et $f(t) \sim e^{-i\omega t}$, $\omega = E/\hbar$. Finalement, $\Psi = ae^{i(kx - \omega t)}$, où a est une certaine constante.

5.62. $w = 1/3 + \sqrt{3}/2\pi = 0{,}61$.

5.63. $\psi = \begin{cases} A\cos(\pi nx/l) & \text{si } n = 1, 3, 5, \ldots, \\ A\sin(\pi nx/l) & \text{si } n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$ Ici $A = \sqrt{2/l}$.

5.65. $dN/dE = (l/\pi\hbar)\sqrt{m/2E}$; lorsque $E = 1$ eV, $dN/dE = 0{,}8\cdot10^7$ niveaux/eV.

5.66. a) Dans ce cas l'équation de Schrödinger a la forme

$$\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 + k^2\psi = 0, \ k^2 = 2mE/\hbar^2.$$

Prenons l'un des sommets du puits de potentiel pour l'origine des coordonnées. D'après l'hypothèse, sur les côtés du puits $\psi(x, y)$ doit s'annuler de sorte qu'on puisse chercher $\psi(x, y)$ sous la forme de produit de deux fonctions sinusoïdales: $\psi(x, y) = a \sin k_1x \cdot \sin k_2y$, étant donné que sur les deux côtés ($x = 0$ et

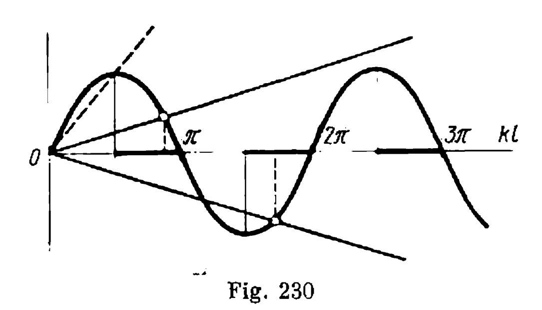


Fig. 230

$y = 0$) $\psi(x, 0) = 0$ et $\psi(0, y) = 0$ automatiquement. Les valeurs virtuelles de k_1 et k_2 découlent de la condition que $\psi(xy)$ s'annule sur les côtés opposés du puits:

$$\psi(l_1, y) = 0, \ k_1 = \pm(\pi/l_1)\, n_1, \ n_1 = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\psi(x, l_2) = 0, \ k_2 = \pm(\pi/l_2)\, n_2, \ n_2 = 1, 2, 3, \ldots$$

En substituant la fonction d'onde dans l'équation de Schrödinger on obtient la relation $k_1^2 + k_2^2 = k^2$, d'où

$$E_{n_1, n_2} = (\pi^2\hbar^2/2m)\,(n_1^2/l_1^2 + n_2^2/l_2^2).$$

b) 9,87; 24,7; 39,5 et 49,4 unités $\hbar^2/ml^2$.

5.67. 1) Ecrivons les équations de Schrödinger pour deux domaines:

$$0 < x < l, \quad \psi_1'' + k^2\psi_1 = 0, \quad k^2 = 2mE/\hbar^2,$$

$$x > l, \quad \psi_2'' - \varkappa^2\psi_2 = 0, \quad \varkappa^2 = 2m(U_0 - E)/\hbar^2.$$

Leurs solutions générales

$$\psi_1(x) = a \sin(kx + \alpha), \ \psi_2(x) = be^{-\varkappa x} + ce^{-\varkappa x}$$

doivent remplir les conditions normales et aux limites. Il découle de la condition $\psi_1(0) = 0$ et de la finitude de la fonction d'onde que $\alpha = 0$ et $c = 0$. Enfin, comme $\psi(x)$ et sa dérivée sont continues au point $x = l$, il vient que $\operatorname{tg} kl = -k/\varkappa$, d'où

$$\sin kl = \pm kl \sqrt{\hbar^2/2ml^2U_0}.$$

En représentant graphiquement les deux membres de la dernière équation (fig. 230), on trouve les points d'intersection des droites avec la sinusoïde. Les racines de l'équation donnée répondant aux valeurs propres de l'énergie E correspondent alors aux points d'intersection $(kl)_i$ tels que $\operatorname{tg}(kl)_i < 0$, i.e. les racines de cette équation appartiennent aux quadrants positifs de la circonférence (sur la figure ces portions de l'axe des abscisses sont marquées par traits forts).

On voit sur le graphique que les racines de l'équation (i.e. les états liés de la particule) ne se réalisent pas toujours. La position limite de la droite est marquée en pointillé.

2) $(l^2U_0)_{1\,\min} = \pi\hbar^2/8m$; $(l^2U_0)_{n\,\min} = (2n-1)^2\,\pi^2\hbar^2/8m$.

3) $w = 2/(4+3\pi) = 0{,}149$. Le fait que la particule peut se trouver dans une région où son énergie $E < U$ représente un phénomène purement quantique. C'est une manifestation des propriétés ondulatoires de la particule qui excluent les valeurs exactes simultanées de la coordonnée et de l'impulsion et par conséquent, la séparation exacte de l'énergie totale de la particule en potentielle et cinétique. Cette séparation n'est possible que dans les limites de précision définies par la relation d'incertitude.

5.68. En effectuant la substitution proposée il vient

$$\chi'' + k^2\chi = 0, \quad k^2 = 2\ mE/\hbar^2.$$

On cherche la solution de cette équation sous la forme $\chi = a \sin(kr + \alpha)$. En exigeant que la fonction d'onde ψ soit finie au point $r = 0$ on obtient que $\alpha = 0$. Ainsi, $\psi = (a/r) \sin kr$. La condition aux limites $\psi(r_0) = 0$ fournit $kr_0 = n\pi$, où $n = 1, 2, \ldots$ D'où $E_n = (\pi^2\hbar^2/2mr_0^2)\, n^2$.

5.69. $\alpha = m\omega/2\hbar$, $E = \hbar\omega/2$, où $\omega = \sqrt{k/m}$.

5.70. $E = -me^4/8\hbar^2$, i.e. le niveau au nombre quantique principal $n = 2$.

5.71. a) La probabilité de ce que l'électron se trouve à la distance r, $r + dr$ du noyau est égale à $dw = \psi^2(r)\, 4\pi r^2\, dr$. La condition de maximum de la fonction dw/dr conduit à $r_{\text{prob}} = r_1$; b) $\langle f \rangle = 2e^2/r_1^2$; c) $\langle U \rangle = -e^2/r_1$; d) $\varphi_0 =$

$$= \int_0^\infty (\rho/r)\, 4\pi r^2\, dr = e/r_1,$$ où $\rho = e\psi^2$ est la densité volumique de charge.

5.72. a) Ecrivons les solutions de l'équation de Schrödinger à gauche et à droite de la frontière de la barrière sous la forme suivante:

$$x < 0, \quad \psi_1(x) = a_1 e^{ik_1x} + b_1 e^{-ik_1x}, \quad k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar\,;$$

$$x > 0, \quad \psi_2(x) = a_2 e^{ik_2x} + b_2 e^{-ik_2x}, \quad k_2 = \sqrt{2m(E-U_0)}/\hbar.$$

Admettons que l'onde incidente est caractérisée par l'amplitude a_1, celle réfléchie, par l'amplitude b_1. Comme dans la région $x > 0$ il n'y a que l'onde passante, alors $b_2 = 0$. Le facteur de réflexion R représente le rapport de l'intensité du flux de particules réfléchi à l'intensité du flux incident ou, ce qui revient au même, le rapport des carrés des amplitudes des ondes réfléchie et incidente. La condition de continuité de ψ et de ψ' au point $x = 0$ conduit à

$$a_1 + b_1 = a_2 \quad \text{et} \quad a_1 - b_1 = (k_2/k_1)\, a_2,$$

d'où

$$R = (b_1 - a_1)^2 = (k_1 - k_2)^2/(k_1 + k_2)^2.$$

b) Dans le cas $E < U_0$ la solution de l'équation de Schrödinger (à droite de la barrière) a la forme

$$\psi_2(x) = a_2 e^{\varkappa x} + b_2 e^{-\varkappa x}, \quad \varkappa = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar.$$

De la finitude de $\psi(x)$ il vient que $a_2 = 0$. La densité de probabilité de trouver la particule au-dessous de la barrière est $w_2(x) = \psi_2^2 \sim e^{-2\varkappa x}$. D'où $x_{\text{eff}} = 1/2\,\varkappa$.

5.73. a) $D \approx e^{-(2l/\hbar)\sqrt{2m(U_0-E)}}$; b) $D \approx e^{-(8l\sqrt{2m}/3\hbar U_0)(U_0-E)^{3/2}}$.

5.74. $-0{,}41$ pour le terme S et $-0{,}04$ pour le terme P.

5.75. $p = \sqrt{\hbar R^*/(E_0 - eV_1)} - 3 = -0{,}88$.

5.76. $E_{\text{liais}} = \hbar R^*/(\sqrt{R^*\lambda_1\lambda_2/2\pi c\Delta\lambda} - 1)^2 = 5{,}3$ eV.

5.77. $0{,}82\mu$ $(3S - 2P)$ et $0{,}68\mu$ $(2P - 2S)$.

5.78. $\Delta E = 2\pi\hbar c\Delta\lambda/\lambda^2 = 2{,}0$ meV.

5.79. $3S_{1/2}$, $3P_{1/2}$, $3P_{3/2}$, $3D_{3/2}$, $3D_{5/2}$.

5.80. a) 1, 2, 3, 4, 5 ; b) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; c) $1/2$, $3/2$, $5/2$, $7/2$, $9/2$.

5.81. Pour l'état ^4P : $(\sqrt{3}/2)\,\hbar$, $(\sqrt{15}/2)\,\hbar$ et $(\sqrt{35}/2)\,\hbar$; pour l'état ^5D : 0, $\sqrt{2}\,\hbar$; $\sqrt{6}\,\hbar$, $\sqrt{12}\,\hbar$ et $\sqrt{20}\,\hbar$.

5.82. b) $^2F_{7/2}$, $M_{max}=(\sqrt{63}/2)\,\hbar$; b) $^3F_4$, $M_{max}=2\sqrt{5}\,\hbar$.

5.83. En état F, $M_S=\sqrt{6}\,\hbar$; en ce qui concerne l'état D, on ne peut établir que $M_S \geqslant \sqrt{6}\,\hbar$.

5.84. 3, 4, 5.

5.85. a) 1, 3, 5, 7, 9 ; b) 2, 4, 6 ; c) 5, 7, 9.

5.86. 31°.

5.87. $^3D_2$.

5.88. $^1P_1$, $^1D_2$, $^1F_3$, $^3P_{0,1,2}$, $^3D_{1,2,3}$, $^3F_{2,3,4}$.

5.89. Les mêmes qu'au problème précédent.

5.90. La deuxième et la troisième.

5.91. $g = 4 + 6 = 10$.

5.92. Respectivement 4, 7 et 10.

5.93. $^3F_3$.

5.94. As.

5.95. a) $^4S_{3/2}$; b) $^3P_2$.

5.96. a) $^4F_{3/2}$, $\hbar\sqrt{15}/2$; b) $^4F_{9/2}$, $3\hbar\sqrt{11}/2$.

5.97. a) Deux ; b) Cinq.

5.98. $\mu=\mu_B\sqrt{35}$ $(^6S_{5/2})$.

5.99. $N/N_0 = (g/g_0)\,e^{-\hbar\omega/kT} = 1{,}14\cdot10^{-4}$, où g et g_0 sont les poids statistiques (multiplicités de dégénérescence) des niveaux $3P$ et $3S$ respectivement ($g = 6$, $g_0=2$).

5.100. $\tau = (n\hbar\omega/P)\,(g/g_0)\,e^{-\hbar\omega/kT} = 65$ ns, où g et g_0 sont les multiplicités de dégénérescence des niveaux de résonance et fondamental.

5.101. $\tau = l/v \ln \eta = 1{,}3$ µs.

5.102. 154 pm.

5.103. a) 843 pm pour Al et 180 pm pour Co ; b) environ 5 keV.

5.104. Trois.

5.105. 15 keV.

5.106. Oui.

5.107. $Z=1+2\sqrt{(n-1)\,e_1V_1/3\hbar R^*\,(n-V_1/V_2)}=29$.

5.108. $Z=1+\sqrt{4\Delta\omega/3R^*}=22$, titane.

5.109. $E_{liais}=(3/4)\,\hbar R^*\,(Z-1)^2+2\pi c\hbar/\lambda_L=5{,}5$ keV.

5.110. $E_L=\hbar\omega/(2\pi c/\omega\Delta\lambda-1)\approx 0{,}5$ keV, où $\omega=(3/4)\,R^*\,(Z-1)^2$.

5.111. $T=(3/4)\,\hbar R^*\,(Z-1)^2-2\pi\, c\hbar/\lambda_K=1{,}45$ keV ; $v=2{,}26\cdot10^7$ m/s.

5.112. a) $\sqrt{12}\,\mu_B$; b) $^2/_5\sqrt{15}\,\mu_B$; c) $^4/_3\sqrt{12}\,\mu_B$.

5.113. $M_s=2\sqrt{3}\,\hbar$.

5.114. $\mu=(3/\sqrt{3})\,\mu_B$.

5.115. $\mu={}^3/_5\sqrt{35}\,\mu_B$.

5.116. $\mu={}^5/_2\sqrt{5}\,\mu_B$.

5.117. $M=(\sqrt{3}/2)\,\hbar$.

5.118. $^5F_1$.

5.119. $\omega = \mu_B gB/\hbar = 1{,}2\cdot10^{10}$ rd/s, où g est le facteur de Landé.

5.120. $F = 2i\mu_B/cr^2 = 3\cdot10^{-21}$ dyn.

5.121. $\partial B/\partial Z = 2T\delta/gJ\mu_B l_1\,(l_1+2l_2) = 15$ kG/cm, où g est le facteur de Landé, J, le nombre quantique du moment résultant.

5.122. a) Ne se décompose pas ; b) en six ; c) ne se décompose pas ($g = 0$).

5.123. a) $5{,}8\cdot10^{-5}$ eV ; b) $\Delta E = 2gJ\mu_B B = 14{,}5\cdot10^{-5}$ eV, où g est le facteur de Landé, J, le nombre quantique du moment résultant.

5.124. $\Delta\lambda = \lambda^2 eB/2\pi mc^2 = 35$ pm.

5.125. 4,0 kG.

5.126. $B = 2\pi c\hbar\delta\bar{\nu}/g\mu_B = 3$kG, où g est le facteur de Landé.

5.127. a) 2 : 1 (rapport des facteurs de Landé correspondants); b) $B = 2\pi c\hbar\Delta\lambda/g\mu_B\eta\lambda^2 = 5{,}5$ kG, où g est le facteur de Landé.

5.128. $\Delta\omega = (\pm 1{,}3,\ \pm 4{,}0,\ \pm 6{,}6)\cdot 10^{10}$ rd/s, six composantes.

5.129. a) Six (1) et quatre (2); b) neuf (1) et six (2).

5.130. $\Delta\omega = (m_1g_1 - m_2g_2)_{\max}\, eB/mc = 1{,}0\cdot 10^{11}$ rd/s.

5.131. $\omega = 4\sqrt{2\hbar/md^2} = 1{,}57\cdot 10^{11}$ rd/s, où m est la masse de la molécule.

5.132. 2 et 3.

5.133. $M = \sqrt{md^2E/2} = 3{,}5\ \hbar$, où m est la masse de la molécule.

5.134. $I = \hbar/\Delta\omega = 1{,}93\cdot 10^{-40}$ g·cm²; $d = 112$ pm.

5.135. 13 niveaux.

5.136. $dN/dE = 1/B\sqrt{1 + 4E/B}$, où $B = \hbar^2/2I$, I est le moment d'inertie de la molécule. Pour $J = 10$, $dN/dE = 1{,}0\cdot 10^4$ niveaux/eV.

5.137. $E_{\text{vibr}}/E_{\text{rot}} = \omega\mu d^2/\hbar$, où μ est la masse réduite de la molécule; a) 36; b) $1{,}7\cdot 10^2$; c) $2{,}9\cdot 10^3$.

5.138. $N_{\text{vibr}}/N_{\text{rot}} = (1/3)\, e^{-\hbar(\omega-2B)/kT} = 3{,}1\cdot 10^{-4}$, où $B = \hbar/2I$, I, le moment d'inertie de la molécule.

5.139. Par définition,

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\sum \varepsilon_v e^{-\varepsilon_v/kT}}{\sum e^{\varepsilon_v/kT}} = \frac{\sum \varepsilon_v e^{-\alpha\varepsilon_v}}{\sum e^{-\alpha\varepsilon_v}},\quad \varepsilon_v = \hbar\omega\left(v + \frac{1}{2}\right),\quad \alpha = \frac{1}{kT}.$$

la sommation étant étendue sur v de 0 à ∞. Cette expression se calcule ainsi:

$$\langle\varepsilon\rangle = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\left(\sum e^{-\alpha\varepsilon_v}\right) = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\frac{e^{-\alpha\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\alpha\hbar\omega}} = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1},$$

$$C_{V_{\text{vibr}}} = N\frac{\partial\langle\varepsilon\rangle}{\partial T} = \frac{R\,(\hbar\omega/kT)^2\, e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2} = 1{,}2\cdot 10^{-4}\ R,$$

où R est la constante des gaz.

5.140. $d = \sqrt{\hbar/\pi c\mu\Delta\bar{\nu}} = 0{,}13$ nm, où μ est la masse réduite de la molécule.

5.141. $\lambda = \lambda_0/(1 \mp \omega\lambda_0/2\pi c) = 423$ et 387 nm.

5.142. $\omega = \pi c\,(1/\lambda_v - 1/\lambda_r) = 1{,}37\cdot 10^{14}$ rd/s; $\varkappa = 4{,}96$ N/cm.

5.143. $I_v/I_r \approx e^{-\hbar\omega/kT} = 0{,}067$. Augmente de 3,9 fois.

5.144. a) Voir la fig. 231,a, où les flèches indiquent le sens du mouvement des noyaux de la molécule. Les pulsations des vibrations sont ω_1, ω_2, ω_3,

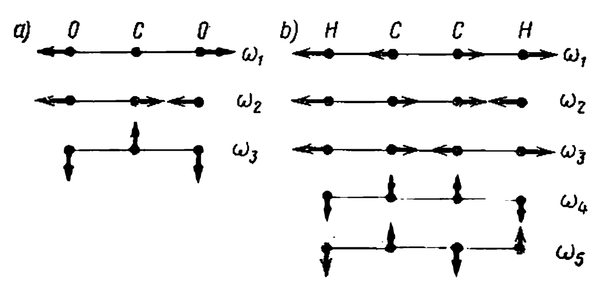


Fig. 231

la pulsation ω_3 correspondant à deux vibrations indépendantes situées dans les plans orthogonaux. Il y a donc, en tout, quatre vibrations différentes. b) Voir la fig. 231,b. Les vibrations distinctes sont en nombre de sept: trois

longitudinales (ω_1, ω_2, ω_3) et quatre transversales (ω_4, ω_5), deux pour chaque pulsation.

5.145. $dN_\omega = (l/\pi v)\,d\omega$.

5.146. $dN_\omega = (S/2\pi v^2)\omega d\omega$.

5.147. $dN_\omega = (V/\pi^2 v^3)\,\omega^2 d\omega$.

5.148. a) $\Theta_D = (\hbar/k)\,v\pi n_0$; b) $\Theta_D = (\hbar/k)\,v\sqrt{4\pi n_0}$; c) $\Theta_D = (\hbar/k)\,v\sqrt[3]{6\pi^2 n_0}$.

5.149. $\Theta = (\hbar/k)\sqrt[3]{18\pi^2 n_0/(1/v_\parallel^3 + 2/v_\perp^3)} = 470$ K, où n_0 est la concentration des atomes.

5.150. $v \approx k\Theta/\hbar\sqrt[3]{6\pi^2 n_0} = 3{,}4$ km/s, où n_0 est la concentration des atomes. Valeurs de table : $v_\parallel = 6{,}3$ km/s, $v_\perp = 3{,}1$ km/s.

5.151. L'énergie vibratoire d'une mole de « cristal »

$$U = R\Theta\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 \int_0^{\Theta/T} \frac{x\,dx}{e^x - 1}\right], \quad x = \hbar\omega/kT.$$

D'où la capacité calorifique molaire

$$C = R\left[2\frac{T}{\Theta}\int_0^{\Theta/T}\frac{x\,dx}{e^x-1} - \frac{\Theta/T}{e^{\Theta/T}-1}\right].$$

Pour $T \gg \Theta$, $C \approx R$.

5.152. a) $dN/d\omega = 2l/\pi a\sqrt{\omega_m^2 - \omega^2}$; b) $N = l/a$, i.e. est égal au nombre d'atomes dans la chaîne.

5.153. $U_0 = 9R\Theta/8\mu = 48{,}6$ J/g, où μ la masse d'une mole.

5.154. a) $\Theta \approx 220$ K ; b) $C \approx 12$ J/(mole·K) ; c) $\omega_{max} = 4{,}1\cdot 10^{13}$ rd/s.

5.156. Oui, la capacité calorifique à ces températures étant proportionnelle à T^3.

5.157. $\langle\varepsilon\rangle = {}^3/_8\ k\Theta$.

5.158. Voir la fig. 232.

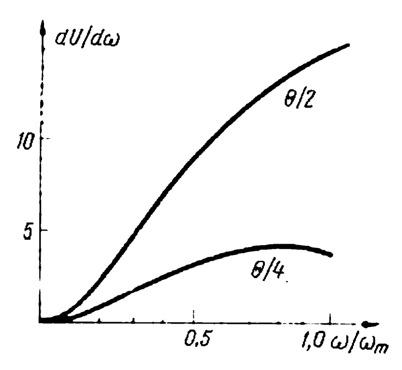


Fig. 232

5.159. $\hbar\omega_{max} \approx 2{,}8\cdot 10^{-2}$ eV ; $\hbar k_{max} \sim 10^{-19}$ g·cm/s.

5.160. a) $T_{max} = (\hbar^2/2m)\,(3\pi^2 n)^{2/3}$; b) $\langle T\rangle = (3/5)\cdot T_{max}$.

5.161. 0,93.

5.162. Environ $3\cdot 10^4$ K.

5.163. a) $dn_v = (m^3/\pi^2\hbar^3)\,v^2\,dv$; b) $\langle v\rangle/v_m = 3/4$.

5.164. $dn_\lambda = 8\pi\lambda^{-4}d\lambda$.

5.165. $p = {}^2/_3 n\langle T\rangle = (\pi\sqrt[3]{9\pi}\,\hbar^2/5m)\,n^{5/3} \approx 5$ GPa.

5.166. a) Désignons par w la probabilité inconnue. Alors, la probabilité de ce que le noyau, ne s'étant pas désintégré au bout de l'intervalle de temps de 0 à t, se désintègre dans l'intervalle de temps suivant dt, est égale à $dw = (1 - w)\lambda\, dt$. En intégrant cette équation, il vient $w = 1 - e^{-\lambda t}$. b) $\tau = 1/\lambda$.

5.167. Environ 1/4.

5.168. $1{,}2 \cdot 10^{15}$.

5.169. $\tau \approx 16$ s.

5.170. 5,3 jours.

5.171. $4{,}6 \cdot 10^2$ particule/mn.

5.172. $\lambda = -(1/t)\ln(1-\eta) \approx \eta/t = 1{,}1 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$; $\tau = 1/\lambda = 1{,}0$ an.

5.173. $T = 4{,}5 \cdot 10^9$ ans; $A = 1{,}2 \cdot 10^4$ désintégration/s.

5.174. $4{,}1 \cdot 10^3$ ans.

5.175. Environ $2{,}0 \cdot 10^9$ ans.

5.176. Respectivement $3{,}2 \cdot 10^{17}$ et $0{,}8 \cdot 10^5$ désintégration/(s·g).

5.177. 0,19 %.

5.178. $t = -(T/\ln 2)\ln(1 - A/q) = 9{,}5$ jours.

5.179. a) $N_2(t) = N_{10}\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$; b) $t_m = \dfrac{\ln(\lambda_1/\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$.

5.180. $N_3(t) = N_{10}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\dfrac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \dfrac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2}\right)$.

5.181. $\dot N_\beta = N_0\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} = 0{,}72 \cdot 10^{11}$ particule/s; $\dot N_\alpha = N_0\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) = 1{,}46 \cdot 10^{11}$ particule/s.
Ici N_0 est le nombre initial des noyaux ^{210}Bi.

5.182. 1) ^{206}Pb; 2) huit désintégrations α et six désintégrations β.

5.183. $v = \sqrt{2m_\alpha T_\alpha}/m = 3{,}4 \cdot 10^5$ m/s; 0,020.

5.184. 1,6 MJ.

5.185. 0,82 MeV.

5.186. a) 6,1 cm; b) respectivement $2{,}1 \cdot 10^5$ et $0{,}77 \cdot 10^5$.

5.187. $Q = \begin{cases} (M_p - M_f)\,c^2 & \text{pour désintégration } \beta^- \text{ et capture } K. \\ (M_p - M_f - 2m)\,c^2 & \text{pour désintégration } \beta^+. \end{cases}$

5.188. 0,56 MeV et 47,5 eV.

5.189. 5 MJ.

5.190. Respectivement 0,32 et 0,65 MeV.

5.191. $T \approx Q(Q + 2mc^2)/2Mc^2 = 0{,}11$ keV, où $Q = (M_N - M_C - 2m)\,c^2$, m étant la masse de l'électron.

5.192. 40 km/s.

5.193. 0,45 c, où c est la célérité de la lumière.

5.194. $\Delta\varepsilon/\varepsilon = E/2mc^2 = 3{,}6 \cdot 10^{-7}$, où m est la masse du noyau.

5.195. $v \approx \varepsilon/mc = 0{,}22$ km/s, où m est la masse du noyau.

5.196. $v = gh/c = 65$ µ/s.

5.197. $h = hc^2/g\varepsilon\tau = 4{,}6$ m.

5.198. $T = T_\alpha/[1 + (M - m)^2/4mM\cos^2\theta] = 6{,}0$ MeV, où m et M sont les masses de la particule α et du noyau de lithium.

5.199. a) $\eta = 4mM/(m + M)^2 = 0{,}89$; b) $\eta = 2m/(m + M) = 2/3$. Ici m et M sont les masses du neutron et du deuton.

5.200. $\vartheta_{max} = \arcsin(m_1/m_2) = 30°$, où m_1 et m_2 sont les masses du proton et du deuton.

5.201. $2 \cdot 10^{11}$ kg/cm³, $1 \cdot 10^{38}$ nucléon/cm³.

5.202. a) d; b) ^{17}F; c) α; d) ^{37}Cl.

5.204. ^8Be; $E_{liais} = 56{,}5$ MeV.

5.205. a) 8,0 MeV; b) 11,5 et 8,7 MeV; c) 14,5 MeV.

5.206. $E_n - E_p = 0{,}22$ MeV.

5.207. $E = 20\varepsilon_{Ne} - 2 \cdot 4\varepsilon_\alpha - 12\varepsilon_C = 11{,}9$ MeV, où ε est l'énergie de liaison par nucléon dans le noyau correspondant.

5.208. a) 8,0225 u.a.m.; b) 10,0135 u.a.m.
5.209. $Q = (E_3 + E_4) - (E_1 + E_2)$.
5.210. a) $8{,}2 \cdot 10^{10}$ kJ; $2{,}7 \cdot 10^6$ kg; b) 1,5 kg.
5.211. $5{,}74 \cdot 10^7$ kJ; $2{,}0 \cdot 10^4$ kg.
5.212. 2,81 MeV; 0,85 MeV.
5.213. $Q = 8\varepsilon_\alpha - 7\varepsilon_{Li} = 17{,}3$ MeV.

5.214. $Q = \left(1 + \frac{m_p}{m_O}\right) T_p - \left(1 - \frac{m_\alpha}{m_O}\right) T_\alpha - 2\cos\vartheta \sqrt{\frac{m_p m_\alpha}{m_O^2} T_p T_\alpha} =$
$= -1{,}2$ MeV.

5.215. a) $-1{,}65$ MeV; b) 6,82 MeV; c) $-2{,}79$ MeV; d) 3,11 MeV.
5.216. $v_\alpha = 0{,}92 \cdot 10^7$ m/s; $v_{Li} = 0{,}53 \cdot 10^7$ m/s.
5.217. 1,9 MeV.

5.218. $T_n = \frac{Q + (1 - m_\alpha/m_C)\,T}{1 + m_n/m_C} = 8{,}5$ MeV.

5.219. 9,1 MeV; 170,5°.
5.221. $T \geqslant E\,(m_p + m_d)/m_d = 3{,}3$ MeV.
5.222. Dans l'intervalle de 1,89 à 2,06 MeV.
5.223. $Q = -(11/12)\,T_{seuil} = -3{,}7$ MeV.
5.224. Respectivement 1,88 et 5,75 MeV.
5.225. 4,4 MeV; $5{,}3 \cdot 10^6$ m/s.
5.226. 2,2 MeV.
5.227. De $E/2mc^2 = 0{,}06\,\%$, où m est la masse du deuton.
5.228. $E = Q + 2T/3 = 6{,}5$ MeV.
5.229. $E_i = E_{liais} + T_i m_C/(m_d + m_C) = 16{,}7$; 16,9; 17,5 et 17,7 MeV, où E_{liais} est l'énergie de liaison du deuton dans un noyau compound.
5.230. $\sigma = (A/N\rho d) \ln \eta = 2{,}5$ kbarn, où A est la masse d'un atome-gramme, N, le nombre d'Avogadro, ρ, la densité.

5.231. $I_0/I = e^{(2\sigma_1 + \sigma_2)nd} = 20$, où n est la concentration des molécules.

5.232. $w = \frac{\sigma_s}{\sigma_s + \sigma_a} [1 - e^{-(\sigma_s + \sigma_a)nd}] = 0{,}35$, où n est la concentration des noyaux de fer.

5.233. a) $T = (w/k) \ln 2$; b) $w = A\,Te/it \ln 2 = 2 \cdot 10^{-3}$.
5.234. a) $t = \eta/\sigma J = 3 \cdot 10^6$ ans; b) $N_{max} = J\sigma N_0 T/\ln 2 = 1{,}0 \cdot 10^{13}$, où N_0 est le nombre de noyaux de ^{197}Au dans la feuille.

5.235. $N = (Jn\sigma/\lambda)\,(1 - e^{-\lambda t})$.

5.236. $J = Ae^{\lambda\tau}/\sigma N_0\,(1 - e^{-\lambda\tau}) = 6 \cdot 10^9$ cm$^{-2}\cdot$s^{-1}, où λ est la constante de désintégration, N_0, le nombre de noyaux dans la feuille.
5.237. $N = N_0 k^{i-1} = 1{,}3 \cdot 10^5$, où i est le nombre de générations.
5.238. $N = \nu P/E = 0{,}8 \cdot 10^{19}$ s^{-1}.
5.239. a) $N/N_0 = 4 \cdot 10^2$; b) $T = \tau/(k - 1) = 10$ s.
5.240. Respectivement 0,05, 0,4 et 9 GeV.

5.241. $\langle l \rangle = c\tau_0 \sqrt{\eta\,(\eta + 2)} = 15$ m.

5.242. $\tau_0 = lmc/\sqrt{T\,(T + 2mc^2)} = 26$ ns.

5.243. $J/J_0 = e^{-lmc/\tau_0\sqrt{T(T+2mc^2)}} = 0{,}22$, où m est la masse au repos du méson.

5.244. $T_\mu = (m_\pi - m_\mu)^2/2m_\pi = 4{,}1$ MeV; $E_\nu = 29{,}8$ MeV.

5.245. $T = [(m_\Sigma - m_n)^2 - m_\pi^2]/2m_\Sigma = 19{,}5$ MeV.

5.246. $T_{max} = (m_\mu - m_e)^2/2m_\mu = 52{,}5$ MeV.

5.247. $m = m_p + T + \sqrt{m_\pi^2 + T\,(T + 2m_p)} = 1\,115$ MeV, particule Λ.

5.248. $E_\nu = (m_\pi^2 - m_\mu^2)/2\,(m_\pi + T) = 22$ MeV.

5.249. $m = \sqrt{m_\Sigma^2 + m_\pi^2 - 2\,(m_\Sigma + T_\Sigma)\,(m_\pi + T_\pi)} = 0{,}94$ GeV, neutron.

5.250. $T_\pi = m_\pi\,[\text{cosec}\,(\theta/2) - 1]$; $E_\gamma = m_\pi/2\sin(\theta/2)$. Pour $\theta = 60°$, $T_\pi = E_\gamma = m_\pi$.

5.252. $\cos(\theta/2) = 1/\sqrt{1 + 2m/T}$, d'où $\theta = 99°$.

5.253. a) $\varepsilon_{\text{seuil}} = 4m_e = 2{,}04$ MeV ; b) $\varepsilon_{\text{seuil}} = 2m_\pi (1 + m_\pi/m_p) = 320$ MeV.

5.254. a) $T_{\text{seuil}} = 6m_p = 5{,}6$ GeV ; b) $T_{\text{seuil}} = m_\pi (4m_p + m_\pi)/2m_p = 0{,}28$ GeV.

5.255. a) 0,90 GeV; b) 0,77 GeV.

5.256. $S = -2$, $Y = -1$, particule Ξ^0.

5.257. Sont interdits 1, 2 et 3.

5.258. Sont interdits 2, 4 et 5.

5.259. Energétique (1); dans les autres processus ne se conservent pas: la charge baryonique (2), la charge électrique (3), l'étrangeté (4), la charge leptonique (5) et (6) les charges électronique et muonique.

APPENDICES

1. Formules trigonométriques essentielles

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\sec^2\alpha-\mathrm{tg}^2\,\alpha=1$ $\csc^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha=1$ $\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$ $\cos\alpha\cdot\mathrm{scs}\,\alpha=1$ $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$	$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ $\mathrm{tg}\,(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}$ $\mathrm{ctg}\,(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta\mp1}{\mathrm{ctg}\,\beta\pm\mathrm{ctg}\,\alpha}$
$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha}}$ $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}}$ $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $\mathrm{tg}\,2\alpha=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$ $\mathrm{ctg}\,2\alpha=\dfrac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha-1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ $\mathrm{ctg}\,\alpha\pm\mathrm{ctg}\,\beta=\pm\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$
$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$	$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$ $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$ $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)$
$\mathrm{sh}\,\alpha=\dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$ $\mathrm{ch}\,\alpha=\dfrac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$	$\mathrm{th}\,\alpha=\dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}$ $\mathrm{cth}\,\alpha=\dfrac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}$

2. Table des sinus

φ°	0′	20′	40′	φ°	0′	20′	40′
0	0,0000	0,0058	0,0116	45	0,7071	0,7112	0,7153
1	0,0175	0,0233	0,0291	46	0,7193	0,7234	0,7274
2	0,0349	0,0407	0,0465	47	0,7314	0,7353	0,7392
3	0,0523	0,0581	0,0640	48	0,7431	0,7470	0,7509
4	0,0698	0,0756	0,0814	49	0,7547	0,7585	0,7623
5	0,0872	0,0929	0,0987	50	0,7660	0,7698	0,7735
6	0,1045	0,1103	0,1161	51	0,7771	0,7808	0,7844
7	0,1219	0,1276	0,1334	52	0,7880	0,7916	0,7951
8	0,1392	0,1449	0,1507	53	0,7986	0,8021	0,8056
9	0,1564	0,1622	0,1679	54	0,8090	0,8124	0,8158
10	0,1736	0,1794	0,1851	55	0,8192	0,8225	0,8258
11	0,1908	0,1965	0,2022	56	0,8290	0,8323	0,8355
12	0,2079	0,2136	0,2196	57	0,8387	0,8418	0,8450
13	0,2250	0,2306	0,2363	58	0,8480	0,8511	0,8542
14	0,2419	0,2476	0,2532	59	0,8572	0,8601	0,8631
15	0,2588	0,2644	0,2700	60	0,8660	0,8689	0,8718
16	0,2756	0,2812	0,2868	61	0,8746	0,8774	0,8802
17	0,2924	0,2979	0,3035	62	0,8829	0,8857	0,8884
18	0,3090	0,3145	0,3201	63	0,8910	0,8936	0,8962
19	0,3256	0,3311	0,3365	64	0,8988	0,9013	0,9038
20	0,3420	0,3475	0,3529	65	0,9063	0,9088	0,9112
21	0,3584	0,3638	0,3692	66	0,9135	0,9159	0,9182
22	0,3746	0,3800	0,3854	67	0,9205	0,9228	0,9250
23	0,3907	0,3961	0,4014	68	0,9272	0,9293	0,9315
24	0,4067	0,4120	0,4173	69	0,9336	0,9356	0,9377
25	0,4226	0,4279	0,4331	70	0,9397	0,9417	0,9436
26	0,4384	0,4436	0,4488	71	0,9455	0,9474	0,9492
27	0,4540	0,4592	0,4643	72	0,9511	0,9528	0,9546
28	0,4695	0,4746	0,4797	73	0,9563	0,9580	0,9596
29	0,4848	0,4899	0,4950	74	0,9613	0,9628	0,9644
30	0,5000	0,5050	0,5100	75	0,9659	0,9674	0,9689
31	0,5150	0,5200	0,5250	76	0,9703	0,9717	0,9730
32	0,5299	0,5348	0,5398	77	0,9744	0,9757	0,9769
33	0,5446	0,5495	0,5544	78	0,9781	0,9793	0,9805
34	0,5592	0,5640	0,5688	79	0,9816	0,9827	0,9838
35	0,5736	1,5783	0,5831	80	0,9848	0,9858	0,9868
36	0,5878	0,5925	0,5972	81	0,9877	0,9886	0,9894
37	0,6018	0,6065	0,6111	82	0,9903	0,9911	0,9918
38	0,6157	0,6202	0,6248	83	0,9925	0,9932	0,9939
39	0,6293	0,6338	0,6383	84	0,9945	1,9951	0,9957
40	0,6428	0,6472	0,6517	85	0,9962	0,9967	0,9971
41	0,6561	0,6604	0,6648	86	0,9976	0,9980	0,9983
42	0,6691	0,6734	0,6777	87	0,9986	0,9989	0,9992
43	0,6820	0,6862	0,6905	88	0,9994	0,9996	0,9997
44	0,6947	0,6988	0,7030	89	0,9998	0,9999	1,0000

3. Table des tangentes

φ°	0′	20′	40′	φ°	0′	20′	40′
0	0,0000	0,0058	0,0116	45	1,0000	1,012	1,024
1	0,0175	0,0233	0,0291	46	1,036	1,048	1,060
2	0,0349	0,0407	0,0466	47	1,072	1,085	1,098
3	0,0524	0,0582	0,0641	48	1,111	1,124	1,137
4	0,0699	0,0758	0,0816	49	1,150	1,164	1,178
5	0,0875	0,0934	0,0992	50	1,192	1,206	1,220
6	0,1051	0,1110	0,1169	51	1,235	1,250	1,265
7	0,1228	0,1287	0,1346	52	1,280	1,295	1,311
8	0,1405	0,1465	0,1524	53	1,327	1,343	1,360
9	0,1584	0,1644	0,1703	54	1,376	1,393	1,411
10	0,1763	0,1823	0,1883	55	1,428	1,446	1,464
11	0,1944	0,2004	0,2065	56	1,483	1,501	1,520
12	0,2126	0,2186	0,2247	57	1,540	1,560	1,580
13	0,2309	0,2370	0,2432	58	1,600	1,621	1,643
14	0,2493	0,2555	0,2617	59	1,664	1,686	1,709
15	0,2679	0,2742	0,2805	60	1,732	1,756	1,780
16	0,2867	0,2931	0,2994	61	1,804	1,829	1,855
17	0,3057	0,3121	0,3185	62	1,881	1,907	1,935
18	0,3249	0,3314	0,3378	63	1,963	1,991	2,020
19	0,3443	0,3508	0,3574	64	2,050	2,081	2,112
20	0,3640	0,3706	0,3772	65	2,145	2,177	2,211
21	0,3839	0,3906	0,3973	66	2,246	2,282	2,318
22	0,4040	0,4108	0,4176	67	2,356	2,394	2,434
23	0,4245	0,4314	0,4383	68	2,475	2,517	2,560
24	0,4452	0,4522	0,4592	69	2,605	2,651	2,699
25	0,4663	0,4734	0,4806	70	2,747	6,798	2,850
26	0,4877	0,4950	0,5022	71	2,904	2,960	3,018
27	0,5095	0,5169	0,5243	72	3,078	3,140	3,204
28	0,5317	0,5392	0,5467	73	3,271	3,340	3,412
29	0,5543	0,5619	0,5696	74	3,487	3,566	3,647
30	0,5774	0,5851	0,5930	75	3,732	3,821	3,914
31	0,6009	0,6088	0,6168	76	4,011	4,113	4,219
32	0,6249	0,6330	0,6412	77	4,331	4,449	4,574
33	0,6494	0,6577	0,6661	78	4,705	4,843	4,989
34	0,6745	0,6830	0,6916	79	5,145	5,309	5,485
35	0,7002	0,7089	0,7177	80	5,671	5,871	6,084
36	0,7265	0,7355	0,7445	81	6,314	6,561	6,827
37	0,7536	0,7627	0,7720	82	7,115	7,429	7,770
38	0,7813	0,7907	0,8002	83	8,144	8,556	9,010
39	0,8098	0,8195	0,8292	84	9,514	10,08	10,71
40	0,8391	0,8491	0,8591	85	11,43	12,25	13,20
41	0,8693	0,8796	0,8899	86	14,30	15,60	17,17
42	0,9004	0,9110	0,9217	87	19,08	21,47	24,54
43	0,9325	0,9435	0,9545	88	28,64	34,37	42,96
44	0,9657	0,9770	0,9884	89	57,29	85,94	171,9

4. Table des logarithmes décimaux

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2488	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	4740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7475
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8632	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

5. Fonctions puissances

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0,00	1,0000	1,0000	2,00	7,3891	0,1353
0,05	1,0513	0,9512	2,05	7,7679	0,1287
0,10	1,1052	0,9048	2,10	8,1662	0,1225
0,15	1,1618	0,8607	2,15	8,5849	0,1165
0,20	1,2214	0,8187	2,20	9,0250	0,1108
0,25	1,2840	0,7788	2,25	9,4877	0,1054
0,30	1,3499	0,7408	2,30	9,9742	0,1003
0,35	1,4191	0,7047	2,35	10,486	0,09537
0,40	1,4918	0,6703	2,40	11,023	0,09072
0,45	1,5683	0,6376	2,45	11,588	0,08629
0,50	1,6487	0,6065	2,50	12,182	0,08208
0,55	1,7333	0,5770	2,55	12,807	0,07808
0,60	1,8221	0,5488	2,60	13,464	0,07427
0,65	1,9155	0,5221	2,65	14,154	0,07065
0,70	2,0138	0,4966	2,70	14,880	0,06721
0,75	2,1170	0,4724	2,75	15,643	0,06393
0,80	2,2255	0,4493	2,80	16,445	0,06081
0,85	2,3396	0,4274	2,85	17,288	0,05784
0,90	2,4596	0,4066	2,90	18,174	0,05502
0,95	2,5857	0,3867	2,95	19,106	0,05234
1,00	2,7183	0,3679	3,00	20,086	0,04979
1,05	2,8577	0,3499	3,05	21,115	0,04736
1,10	3,0042	0,3329	3,10	22,198	0,04505
1,15	3,1582	0,3166	3,15	23,336	0,04285
1,20	3,3201	0,3012	3,20	24,533	0,04076
1,25	3,4903	0,2865	3,25	25,790	0,03877
1,30	3,6693	0,2725	3,30	27,113	0,03688
1,35	3,8574	0,2592	3,35	28,503	0,03508
1,40	4,0552	0,2466	3,40	29,964	0,03337
1,45	4,2631	0,2346	3,45	31,500	0,03175
1,50	4,4817	0,2231	3,50	33,115	0,03020
1,55	4,7115	0,2123	3,55	34,813	0,02872
1,60	4,9530	0,2019	3,60	36,598	0,02732
1,65	5,2070	0,1921	3,65	38,475	0,02599
1,70	5,4739	0,1827	3,70	40,447	0,02472
1,75	5,7546	0,1738	3,75	42,521	0,02352
1,80	6,0496	0,1653	3,80	44,701	0,02237
1,85	6,3598	0,1572	3,85	46,993	0,02128
1,90	6,6859	0,1496	3,90	49,402	0,02024
1,95	7,0287	0,1423	3,95	51,935	0,01925

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
4,00	54,598	0,01832	6,0	403,43	0,00248
4,05	57,397	0,01742	6,1	445,86	0,00224
4,10	60,340	0,01657	6,2	492,75	0,00203
4,15	63,434	0,01576	6,3	544,57	0,00184
4,20	66,686	0,01500	6,4	601,85	0,00166
4,25	70,105	0,01426	6,5	665,14	0,001503
4,30	73,700	0,01357	6,6	735,10	0,001360
4,35	77,478	0,01991	6,7	812,41	0,001231
4,40	81,451	0,01228	6,8	897,85	0,001114
4,45	85,627	0,01168	6,9	992,27	0,001008
4,50	90,017	0,01111	7,0	1096,6	0,000912
4,55	94,632	0,01057	7,1	1212,0	0,000825
4,60	99,484	0,01005	7,2	1339,4	0,000747
4,65	104,58	0,00956	7,3	1480,5	0,000676
4,70	109,95	0,00910	7,4	1636,0	0,000611
4,75	115,58	0,00865	7,5	1808,0	0,000553
4,80	121,51	0,00823	7,6	1998,2	0,000500
4,85	127,74	0,00783	7,7	2208,3	0,000453
4,90	134,29	0,00745	7,8	2440,6	0,000410
4,95	141,17	0,00708	7,9	2697,3	0,000371
5,00	148,41	0,00674	8,0	2981,0	0,000335
5,05	156,02	0,00641	8,1	3294,5	0,000304
5,10	164,02	0,00610	8,2	3641,0	0,000275
5,15	172,43	0,00580	8,3	4023,9	0,000249
5,20	181,27	0,00552	8,4	4447,1	0,000225
5,25	190,57	0,00525	8,5	4914,8	0,000203
5,30	200,34	0,00499	8,6	5431,7	0,000184
5,35	210,61	0,00475	8,7	6002,9	0,000167
5,40	221,41	0,00452	8,8	6634,2	0,000151
5,45	232,76	0,00430	8,9	7332,0	0,000136
5,50	244,69	0,00409	9,0	8103,1	0,000123
5,55	257,24	0,00389	9,1	8955,3	0,000112
5,60	270,43	0,00370	9,2	9897,1	0,000101
5,65	284,29	0,00352	9,3	10938	0,000091
5,70	298,87	0,00335	9,4	12088	0,000083
5,75	314,19	0,00318	9,5	13360	0,000075
5,80	330,30	0,00303	9,6	14765	0,000068
5,85	347,23	0,00288	9,7	16318	0,000061
5,90	365,04	0,00274	9,8	18034	0,000055
5,95	383,75	0,00261	9,9	19930	0,000050
			10,0	22026	0,000045

6. Alphabet grec

Α, α	alpha	Ι, ι	iota	Ρ, ρ	rô
Β, β	bêta	Κ, ϰ	kappa	Σ, σ	sigma
Γ, γ	gamma	Λ, λ	lambda	Τ, τ	tau
Δ, δ	delta	Μ, μ	mu	Υ, υ	upsilon
Ε, ε	epsilon	Ν, ν	nu	Φ, φ	phi
Ζ, ζ	dzéta	Ξ, ξ	ksi	Χ, χ	khi
Η, η	êta	Ο, ο	omicron	Ψ, ψ	psi
Θ, ϑ, θ	thêta	Π, π	pi	Ω, ω	oméga

7. Facteurs numériques usuels et quelques formules d'approximation

Facteurs numériques	Formules d'approximation ($\alpha \ll 1$)
$\pi = 3{,}1416$	$(1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n\alpha$
$\pi^2 = 9{,}8696$	$e^{\alpha} \approx 1 + \alpha$
$\sqrt{\pi} = 1{,}7725$	$\ln(1+\alpha) \approx \alpha$
$e = 2{,}7183$	$\sin\alpha \approx \alpha$
$\log e = 0{,}4343$	$\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$
$\ln 10 = 2{,}3026$	$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$

8. Relations usuelles du calcul vectoriel

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac} \qquad [\mathbf{a},\ \mathbf{b}+\mathbf{c}] = [\mathbf{ab}] + [\mathbf{ac}]$$

$$\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad [\mathbf{a}\,[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$$

$$\mathbf{ab} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_z)\,\mathbf{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt} \qquad \frac{d}{dt}(\mathbf{ab}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b} + \mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha\mathbf{a}) = \frac{d\alpha}{dt}\mathbf{a} + \alpha\frac{d\mathbf{a}}{dt} \qquad \frac{d}{dt}[\mathbf{ab}] = \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b}\right] + \left[\mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right]$$

9. Table des dérivées et des intégrales

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
x^n	nx^{n-1}	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^{nx}	ne^{nx}	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\frac{u}{v}$	$\frac{vu'-v'u}{v^2}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
		$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x$$

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln\cos x$$

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln\sin x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

Intégration par parties :

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

10. Données astronomiques

Corps cosmique	Rayon moyen, m	Masse, kg	Densité moyenne, 10^3 kg/m^3	Période de révolution autour de l'axe, jours
Soleil	$6,95 \cdot 10^8$	$1,97 \cdot 10^{30}$	1,41	25,4
Terre	$6,37 \cdot 10^6$	$5,96 \cdot 10^{24}$	5,52	1,00
Lune	$1,74 \cdot 10^6$	$7,30 \cdot 10^{22}$	3,30	27,3

Planètes du Système solaire	Distance moyenne du Soleil, 10^6 km	Période de révolution autour du Soleil en années
Mercure	57,87	0,241
Vénus	108,14	0,615
Terre	149,50	1,000
Mars	227,79	1,881
Jupiter	777,8	11,862
Saturne	1 426,1	29,458
Uranus	2 867,7	84,013
Neptune	4 494	164,79
Pluton	9 508	248,43

11. Densités des substances

Solides	ρ, g/cm^3	Liquides	ρ, g/cm^3
Aluminium	2,7	Alcool	0,79
Argent	10,5	Benzène	0,88
Cadmium	8,65	Eau	1,00
Cobalt	8,9	Eau lourde	1,1
Cuivre	8,9	Ether	0,72
Diamant	3,5	Glycérine	1,26
Etain	7,4	Huile de ricin	0,90
Fer (acier)	7,8	Kérosène	0,80
Glace	0,916	Mercure	13,6
Graphite	1,6		
Liège	0,20	**Gaz (conditions normales)**	**ρ, kg/m^3**
Molybdène	10,2		
Nickel	8,9		
Or	19,3		
Platine	21,5	Air	1,293
Plomb	11,3	Ammoniac	0,77
Porcelaine	2,3	Azote	1,25
Titane	4,5	Chlore	3,21
Tungstène	19,1	Gaz carbonique	1,98
Uranium	19,0	Hydrogène	0,09
Zinc	7,0	Méthane	0,72
		Oxygène	1,43

12. Coefficients de dilatation thermique
(à la température ambiante)

Solides	Coefficient de dilatation linéaire α, $10^{-6}K^{-1}$	Liquides	Coefficient de dilatation volumique β, $10^{-4}K^{-1}$
Acier (fer)	11	Eau	2,1
Aluminium	22,9	Ethanol	11,0
Cuivre	16,7	Glycérine	5,0
Laiton	18,9	Kérosène	10,0
Verre ordinaire	8,5	Mercure	1,8

Remarque: $\alpha = \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial T}$; $\beta = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T}$.

13. Constantes élastiques. Limite de rupture

Matériau	Module de Young E, GPa	Module de cisaillement G, GPa	Coefficient de Poisson μ	Limite de rupture σ_m, GPa	Coefficient de compressibilité β, GPa^{-1}
Acier (fer)	200	81	0,29	0,60	0,006
Aluminium	70	26	0,34	0,10	0,014
Cuivre	130	40	0,34	0,30	0,007
Eau	—	—	—	—	0,49
Plomb	16	5,6	0,44	0,015	0,022
Verre	60	30	0,25	0,05	0,025

Remarque: coefficient de compressibilité $\beta = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$.

14. Pression de la vapeur d'eau saturante

°C	Pression, kPa	°C	Pression, kPa	°C	Pression, kPa
0	0,61	25	3,15	60	19,9
5	0,87	30	4,23	70	31,0
10	1,22	35	5,60	80	47,3
15	1,70	40	7,35	90	70,0
20	2,33	50	12,3	100	101

15. Constantes des gaz
(conditions normales)

Gaz, masse moléculaire relative	$\gamma = \frac{c_p}{c_V}$	Conductibilité calorifique $\varkappa$, $\frac{mW}{m \cdot K}$	Viscosité η, $\mu Pa \cdot s$	Diamètre de la molécule d, nm	Constantes de Van der Waals	
					a, $\frac{kN \cdot m^4}{kmole^2}$	b, $\frac{m^3}{kmole}$
He (4)	1,63	141,5	0,189	0,20	—	—
Ar (40)	1,67	16,2	0,221	0,35	132	0,032
H_2 (2)	1,41	168,4	0,084	0,27	24	0,027
N_2 (28)	1,40	24,3	0,167	0,37	137	0,039
O_2 (32)	1,40	24,4	0,192	0,35	137	0,032
CO_2 (44)	1,30	23,2	0,140	0,40	367	0,043
H_2O (18)	1,32	15,8	0,090	0,30	554	0,030
Air (29)	1,40	24,1	0,172	0,35	·	—

Remarque. Dans ce tableau sont données les valeurs moyennes des diamètres des molécules. Lors des calculs plus précis on tient compte du fait que les valeurs de d obtenues à partir des coefficients de viscosité, de conductibilité thermique et de diffusion et de la constante b de Van der Waals se distinguent notablement l'une de l'autre.

16. Constantes des liquides et solides
(conditions normales)

Substance	Capacité thermique c, $\frac{J}{g \cdot K}$	Chaleur de vaporisation λ, J/g	Chaleur de fusion r, J/g	Tension superficielle α, mN/m
Alcool	2,42	853	—	22
Aluminium	0,90	—	321	—
Argent	0,23	—	88	—
Cuivre	0,39	—	175	—
Eau	4,18	2 250	—	73
Glace	2,09	—	333	—
Glycérine	2,42	—	—	66
Mercure	0,14	284	—	490

17. Permittivités diélectriques
(relatives)

Diélectrique	ε	Diélectrique	ε
Air	1,00058	Paraffine	2,0
Alcool	26	Plexiglas	3,5
Eau	81	Polyéthylène	2,3
Ebonite	2,7	Porcelaine	6,0
Kérosène	2,0	Verre	6,0
Mica	7,5		

18. Résistivités des conducteurs

Conducteur	Résistivité (à 20 °C) ρ, nΩ·m	Coefficient thermique α, kK^{-1}
Aluminium	25	4,5
Argent	15	4,1
Cuivre	16	4,3
Fer	90	6,5
Or	20	4,0
Plomb	190	4,2
Tungstène	50	4,8

19. Perméabilités magnétiques des para et diamagnétiques (relatives)

Paramagnétiques	μ—1, 10^{-6}	Diamagnétiques	μ—1, 10^{-6}
Air	0,38	Benzène	—7,5
Aluminium	23	Bismuth	—176
Azote	0,013	Cuivre	—10,3
Ebonite	14	Eau	—9,0
Oxygène	1,9	Hydrogène	—0,063
Oxygène liquide	3 400	Quartz	—15,1
Platine	360	Sel gemme	—12,6
Tungstène	176	Verre	—12,6

20. Indices de réfraction

Substance	*n*	Substance	*n*
Air	1,00029	Verre	1,50
Eau	1,33	Diamant	2,42

Remarque. Les valeurs de *n* susmentionnées ne sont que conventionnelles, l'indice de réfraction étant fonction de la nature de substance et de la longueur d'onde de la lumière.

Longueur d'onde λ, nm	Couleur	Spath d'Islande		Quartz	
		n_e	n_o	n_e	n_o
687	Rouge	1,484	1,653	1,550	1,541
656	Orangé	1,485	1,655	1,551	1,542
589	Jaune	1,486	1,658	1,553	1,544
527	Vert	1,489	1,664	1,556	1,547
486	Bleu	1,491	1,668	1,559	1,550
431	Indigo	1,495	1,676	1,564	1,554
400	Violet	1,498	1,683	1,568	1,558

21. Rotation du plan de polarisation

Rotation naturelle dans le quartz (épaisseur de la lame : 1 mm)

λ, nm	φ, degrés	λ, nm	φ, degrés	λ, nm	φ, degrés
199,0	295,65	344,1	70,59	589,5	21,72
217,4	226,91	372,6	58,89	656,3	17,32
219,4	220,7	404,7	48,93	670,8	16,54
257,1	143,3	435,9	41,54	1 040	6,69
274,7	121,1	491,6	31,98	1 450	3,41
328,6	78,58	508,6	29,72	1 770	2,28

Rotation magnétique ($\lambda = 589$ nm), $\varphi = VlH$,
V — constante de Verdet

Liquide	V, $\frac{\text{mn ang.}}{\text{cm}\cdot\text{Œ}}$	Liquide	V, $\frac{\text{mn ang.}}{\text{cm}\cdot\text{Œ}}$
Benzène	2,062	Ethanol	0,864
Eau	0,013	Sulfure de carbone	0,042

22. Travail d'extraction de l'électron des métaux

Métal	A, eV	Métal	A, eV	Métal	A, eV
Aluminium	3,74	Cuivre	4,47	Platine	5,29
Argent	4,28	Fer	4,36	Potassium	2,15
Baryum	2,29	Lithium	2,39	Sodium	2,27
Bismuth	4,62	Molybdène	4,27	Titane	3,92
Césium	1,89	Nickel	4,84	Tungstène	4,50
Cobalt	4,25	Or	4,58	Zinc	3,74

23. Frontière de la bande d'absorption K

Z	Elément	λ_K, pm	Z	Elément	λ_K, pm
23	V	226,8	47	Ag	48,60
26	Fe	174,1	50	Sn	42,39
27	Co	160,4	74	W	17,85
28	Ni	148,6	78	Pt	15,85
29	Cu	138,0	79	Au	15,35
30	Zn	128,4	82	Pb	14,05
42	Mo	61,9	92	U	10,75

24. Facteurs massiques d'atténuation (pinceau des rayons X)

λ, pm	Facteur massique d'atténuation μ/ρ, cm²/g				
	Air	Eau	Aluminium	Cuivre	Plomb
10		0,16	0,16	0,36	3,8
20		0,18	0,28	1,5	4,9
30		0,29	0,47	4,3	14
40		0,44	1,1	9,8	31
50	0,48	0,66	2,0	19	54
60	0,75	1,0	3,4	32	90
70	1,3	1,5	5,1	48	139
80	1,6	2,1	7,4	70	
90	2,1	2,8	11	98	
100	2,6	3,8	15	131	
150	8,7	12	46	49	
200	21	28	102	108	
250	39	51	194	198	

25. Potentiels d'ionisation des atomes

Z	Atome	Potentiel d'ionisation φ, V	Z	Atome	Potentiel d'ionisation φ, V
1	H	13,59	7	N	14,54
2	He	24,58	8	O	13,62
3	Li	5,39	9	F	17,42
4	Be	9,32	10	Ne	21,56
5	B	8,30	11	Na	5,14
6	C	11,27	80	Hg	10,44

26. Masses des atomes légers

Z	Isotope	Défaut de masse de l'atome $A_r - A$, u.a.m.	Z	Isotope	Défaut de masse de l'atome $A_r - A$, u.a.m.
0	n	0,00867	6	^{11}C	0,01143
1	^{1}H	0,00783		^{12}C	0
	^{2}H	0,01410		^{13}C	0,00335
	^{3}H	0,01605	7	^{13}N	0,00574
2	^{3}He	0,01603		^{14}N	0,00307
	^{4}He	0,00260		^{15}N	0,00011
3	^{6}Li	0,01513	8	^{15}O	0,00307
	^{7}Li	0,01601		^{16}O	—0,00509
4	^{7}Be	0,01693		^{17}O	—0,00087
	^{8}Be	0,00531	9	^{19}F	—0,00160
	^{9}Be	0,01219	10	^{20}Ne	—0,00756
	^{10}Be	0,01354	11	^{23}Na	—0,01023
5	^{10}B	0,01294		^{24}Na	—0,00903
	^{11}B	0,00930	12	^{24}Mg	—0,01496

Remarque. Ici A_r est la masse atomique relative (en u.a.m.), A, le nombre de masse.

27. Périodes des radio-isotopes

Z	Isotope	Radioactivité	Période
27	Cobalt ^{60}Co	β	5,2 ans
84	Polonium ^{210}Po	α	138 jours
88	Radium ^{226}Ra	α	1 620 ans
86	Radon ^{222}Rn	α	3,8 jours
38	Strontium ^{90}Sr	β	28 ans
92	Uranium ^{238}U	α	$4{,}5 \cdot 10^{9}$ ans

28. Particules élémentaires

Particule		Masse, MeV	I	Charges			S	T	T_z
				Q	B	L			
Photon γ		0	1	0	0	0			
Neutrino ν		0	1/2	0	0	+1			
Electron e^-		0,511	1/2	—1	0	+1			
Muon μ^-		105,7	1/2	—1	0	+1			
Mésons :	π^+	139,6	0	+1	0	0	0	1	+1
	π^0	135,0	0	0	0	0	0	1	0
	K^+	493,8	0	+1	0	0	+1	1/2	+1/2
	K^0	498,0	0	0	0	0	+1	1/2	—1/2
Proton	p	938,3	1/2	+1	+1	0	0	1/2	+1/2
Neutron	n	936,6	1/2	0	+1	0	0	1/2	—1/2
Hypérons :	Λ^0	1 115,4	1/2	0	+1	0	—1	0	0
	Σ^+	1 189,4	1/2	+1	+1	0	—1	1	+1
	Σ^0	1 192	1/2	0	+1	0	—1	1	0
	Σ^-	1 197	1/2	—1	+1	0	—1	1	—1
	Ξ^0	1 314	1/2	0	+1	0	—2	1/2	+1/2
	Ξ^-	1 321	1/2	—1	+1	0	—2	1/2	—1/2
	Ω^-	1 675	3/2	—1	+1	0	—3	0	0

Remarque. Ici I est le spin, Q, B, L, les charges électrique, baryonique et leptonique, S, l'étrangeté, T, le spin isotopique, T_z, sa projection.

La masse, I et T des antiparticules sont identiques à ceux des particules ; les valeurs des charges Q, B et L et des S et T_z sont de signe contraire.

Périodes	Grou				
	I	II	III	IV	V
1	H 1 1,008				
2	Li 3 6,94	Be 4 9,01	B 5 10,81	C 6 12,01	N 7 14,01
3	Na 11 22,99	Mg 12 24,31	Al 13 26,98	Si 14 28,09	P 15 30,97
4	K 19 39,10	Ca 20 40,08	21 44,96 Sc	22 47,90 Ti	23 50,94 V
	29 63,54 Cu	30 65,37 Zn	Ga 31 69,72	Ge 32 72,59	As 33 74,92
5	Rb 37 85,47	Sr 38 87,62	39 88,91 Y	40 91,22 Zr	41 92,91 Nb
	47 107,9 Ag	48 112,4 Cd	In 49 114,8	Sn 50 118,7	Sb 51 121,8
6	Cs 55 132,9	Ba 56 137,3	57 * 138,9 La	72 178,5 Hf	73 181,0 Ta
	79 197,0 Au	80 200,6 Hg	Tl 81 204,4	Pb 82 207,2	Bi 83 209,0
7	Fr 87 (223)	Ra 88 (226)	89 ** (227) Ac	Ku 104 (260)	

* LANTHANIDES

58 140,1 Ce	59 140,9 Pr	60 144,2 Nd	61 (147) Pm	62 150,4 Sm	63 152,0 Eu	64 157,3 Gd
65 158,9 Tb	66 162,5 Dy	67 164,9 Ho	68 167,3 Er	69 168,9 Tm	70 173,0 Yb	71 175,0 Lu

des éléments

pes					
VI	VII	VIII			0
					He 2 4,00
O 8 16,00	F 9 19,00				Ne 10 20,18
S 16 32,06	Cl 17 35,45				Ar 18 39,95
24 52,00 Cr	25 54,94 Mn	26 55,85 Fe	27 58,93 Co	28 58,71 Ni	
Se 34 78,96	Br 35 79,91				Kr 36 83,80
42 95,94 Mo	43 (99) Tc	44 101,1 Ru	45 102,9 Rh	46 106,4 Pd	
Te 52 127,6	I 53 126,9				Xe 54 131,3
74 183,9 W	75 186,2 Re	76 190,2 Os	77 192,2 Ir	78 195,1 Pt	
Po 84 (210)	At 85 (210)				Rn 86 222
(					

** ACTINIDES

90 232,0 Th	91 (231) Pa	92 238,0 U	93 (237) Np	94 (244) Pu	95 (243) Am	96 (247) Cm
97 (247) Bk	98 (252) Cf	99 (254) Es	100 (257) Fm	101 (257) Md	102 (255) (No)	103 (256) (Lr)

30. Unités des grandeurs physiques

Notations et appellations des certaines unités

A, ampère B, bel barn C, coulomb cd, candela dyn, dyne eV, électron-volt F, farad G, gauss g, gramme H, henry Hz, hertz	h, heure J, joule K, kelvin l, litre lm, lumen lx, lux M, maxwell m, mètre mn, minute N, newton Œ, œrsted Pa, pascal	Po, poise rd, radian S, siemens s, seconde sr, stéradian T, tesla V, volt u.a.m., unité atomique de masse W, watt Wb, weber δ, dioptrie

Multiples et sous-multiples décimaux

giga ... G ... (10^9) méga ... M ... (10^6) kilo ... k ... (10^3)	déci ... d ..., (10^{-1}) centi ... c ..., (10^{-2}) milli ... m ... (10^{-3})	micro ... μ ... (10^{-6}) nano ... n ... (10^{-9}) pico ... p ... (10^{-12})

Unités de mesure de SI et de CGS

Grandeur	Unité de mesure		Rapport $\frac{\text{Unité SI}}{\text{Unité CGS}}$
	SI	CGS	
Longueur	m	cm	10^2
Temps	s	s	1
Vitesse	m/s	cm/s	10^2
Accélération	m/s²	cm/s²	10^2
Fréquence des oscillations	Hz	Hz	1
Vitesse angulaire	rd/s	rd/s	1
Accélération angulaire	rd/s²	rd/s²	1
Masse	kg	g	10^3
Densité	kg/m³	g/cm³	10^{-3}
Force	N	dyn	10^5
Pression, contrainte	Pa	dyn/cm²	10
Impulsion	kg·m/s	g·cm/s	10^5
Moment d'une force	N·m	dyn·cm	10^7
Energie, travail	J	erg	10^7
Puissance	W	erg/s	10^7
Densité de flux d'énergie	W/m²	erg/(s·cm²)	10^3
Moment cinétique	kg·m²/s	g·cm²/s	10^7
Moment d'inertie	kg·m²	g·cm²	10^7
Viscosité	Pa·s	Po	10

Grandeur	Unité de mesure		Rapport $\frac{\text{Unité SI}}{\text{Unité CGS}}$
	SI	CGS	
Température	K	K	1
Capacité calorifique, entropie	J/K	erg/K	10^7
Quantité d'électricité	C	u.é.s. CGS	$3\cdot10^9$
Potentiel	V	u.é.s. CGS	1/300
Intensité du champ électrique	V/m	u.é.s. CGS	$1/(3\cdot10^4)$
Déplacement électrique	C/m²	u.é.s. CGS	$12\pi\cdot10^5$
Moment électrique du dipôle	C·m	u.é.s. CGS	$3\cdot10^{11}$
Vecteur polarisation	C/m²	u.é.s. CGS	$3\cdot10^5$
Capacité	F	cm	$9\cdot10^{11}$
Intensité de courant	A	u.é.s. CGS	$3\cdot10^9$
Densité de courant	A/m²	u.é.s. CGS	$3\cdot10^5$
Résistance	Ω	u.é.s. CGS	$1/(9\cdot10^{11})$
Résistivité	Ω·m	u.é.s. CGS	$1/(9\cdot10^9)$
Conductivité	S	u.é.s. CGS	$9\cdot10^{11}$
Induction magnétique	T	G	10^4
Flux magnétique	Wb	M	10^8
Intensité du champ magnétique	A/m	Œ	$4\pi\cdot10^{-3}$
Moment magnétique	A·m²	u.é.m. CGS	10^3
Vecteur intensité d'aimantation	A/m	u.é.m. CGS	10^{-3}
Inductance	H	cm	10^9
Intensité lumineuse	cd	cd	1
Flux lumineux	lm	lm	1
Eclairement	lx		
Luminosité	lx		
Luminance	cd/m²		

R e m a r q u e. Les unités électriques et magnétiques CGS sont données ici en système absolu de Gauss.

Certaines unités hors systéme

1 an $=3{,}11\cdot10^7$ s	1 eV $=\begin{cases}1{,}6\cdot10^{-19}\ \text{J}\\1{,}6\cdot10^{-12}\ \text{erg}\end{cases}$
1 bar $=10^5$ Pa (exact)	
1 barn $=\begin{cases}10^{-28}\ \text{m}^2\\10^{-24}\ \text{cm}^2\end{cases}$	1 u.a.m. $=\begin{cases}1{,}660\cdot10^{-27}\ \text{kg}\\931{,}4\ \text{MeV}\end{cases}$
1 atm $=101$ kPa	1 Ci $=3{,}70\cdot10^{10}\ \text{s}^{-1}$

31. Formules essentielles de l'électromagnétisme en SI et système absolu de Gauss

Formule	SI	Système absolu de Gauss
Intensité du champ d'une charge ponctuelle	$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}$	$E=\frac{q}{\varepsilon r^2}$
Intensité du champ d'un condensateur plan	$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}$	$E=\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$
Potentiel du champ d'une charge ponctuelle	$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r}$	$\varphi=\frac{q}{\varepsilon r}$
Relation entre **E** et φ	$\mathbf{E}=-\text{grad}\ \varphi,\ \varphi_1-\varphi_2=\int_1^2 E_l dl$	
Dipôle électrique **p** dans le champ **E**	$\mathbf{N}=(\mathbf{p}\times\mathbf{E}),\ W=-\mathbf{pE}$	
Relation entre **P** et **E**	$\mathbf{P}=\varkappa\varepsilon_0\mathbf{E}$	$\mathbf{P}=\varkappa\mathbf{E}$
Relation entre σ', **P** et **E**	$\sigma'=P_n=\varkappa\varepsilon_0 E_n$	$\sigma'=P_n=\varkappa E_n$
Définition du vecteur **D**	$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$	$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$
Relation entre ε et $\varkappa$	$\varepsilon=1+\varkappa$	$\varepsilon=1+4\pi\varkappa$
Relation entre **D** et **E**	$\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$	$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$
Théorème de Gauss pour le vecteur **D**	$\oint D_n dS=\sum q$	$\oint D_n dS=4\pi\sum q$
Capacité d'un condensateur	$C=q/U$	
Capacité d'un condensateur plan	$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$	$C=\frac{\varepsilon S}{4\pi d}$
Energie d'un système de charges	$W=\frac{1}{2}\sum q_i\varphi_i$	
Energie d'un condensateur	$W=CU^2/2$	
Densité d'énergie du champ électrique	$w=\frac{ED}{2}$	$w=\frac{ED}{8\pi}$
Loi d'Ohm	$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$	
Loi de Joule-Lenz	$w=\sigma E^2$	
Moment magnétique d'un circuit parcouru par un courant	$p_m=iS$	$p_m=\frac{1}{c}iS$
Dipôle magnétique $\mathbf{p}_m$ dans le champ **B**	$\mathbf{N}=(\mathbf{p}_m\times\mathbf{B}),\ W=-\mathbf{p}_m\mathbf{B}$	
Loi de Biot-Savart-Laplace	$d\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i(d\mathbf{l}\times\mathbf{r})}{r^3}$	$d\mathbf{B}=-\frac{1}{c}\frac{i(d\mathbf{l}\times\mathbf{r})}{r^3}$

Formule	SI	Système absolu de Gauss
Induction magnétique :		
a) d'un courant rectiligne	$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2i}{r}$	$B=\frac{1}{c}\frac{2i}{r}$
b) au centre d'une spire	$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi i}{r}$	$B=\frac{1}{c}\frac{2\pi i}{r}$
c) dans un solénoïde	$B=\mu_0 ni$	$B=\frac{4\pi}{c}ni$
Définition du vecteur **H**	$\mathbf{H}=\mathbf{B}/\mu_0-\mathbf{J}$	$\mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{J}$
Circulation du vecteur **H**	$\oint H_l dl=\sum i$	$\oint H_l dl=\frac{4\pi}{c}\sum i$
Relation entre **J** et **H**	$\mathbf{J}=\chi\mathbf{H}$	$\mathbf{J}=\chi\mathbf{H}$
Relation entre μ et χ	$\mu=1+\chi$	$\mu=1+4\pi\chi$
Relation entre **B** et **H**	$\mathbf{B}=\mu_0\mu\mathbf{H}$	$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$
Force de Lorentz	$\mathbf{F}=q\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$	$\mathbf{F}=\frac{q}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$
Loi d'Ampère	$d\mathbf{F}=i\,(d\mathbf{l}\times\mathbf{B})$	$d\mathbf{F}=\frac{i}{c}(d\mathbf{l}\times\mathbf{B})$
Interaction des courants parallèles	$F=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2i_1i_2}{d}$	$F=\frac{1}{c^2}\frac{2i_1i_2}{d}$
F.é.m. d'induction	$\mathscr{E}_i=-\frac{d\Psi}{dt}$	$\mathscr{E}_i=-\frac{1}{c}\frac{d\Psi}{dt}$
Inductance	$L=\Psi/i$	$L=c\Psi/i$
Inductance d'un solénoïde	$L=\mu_0\mu n^2V$	$L=4\pi\mu n^2V$
Energie du champ magnétique d'un courant	$W=\frac{Li^2}{2}$	$W=\frac{1}{c^2}\frac{Li^2}{2}$
Densité d'énergie du champ magnétique	$w=\frac{BH}{2}$	$w=\frac{BH}{8\pi}$
Equations de Maxwell sous forme intégrale	$\oint D_n dS=\int\rho dV$ $\oint E_l dl=-\int\dot{B}_n dS$ $\oint B_n dS=0$ $\oint H_l dl=\int(j_n+\dot{D}_n)\,dS$	$\oint D_n dS=4\pi\int\rho dV$ $\oint E_l dl=-\frac{1}{c}\int\dot{B}_n dS$ $\oint B_n dS=0$ $\oint H_l dl=\frac{4\pi}{c}\int(j_n+\frac{\dot{D}_n}{4\pi})\,dS$

Formule	SI	Système absolu de Gauss
Equations de Maxwell sous forme différentielle	$\mathrm{div}\ \mathbf{D}=\rho$ $\mathrm{rot}\ \mathbf{E}=-\dot{\mathbf{B}}$ $\mathrm{div}\ \mathbf{B}=0$ $\mathrm{rot}\ \mathbf{H}=\mathbf{j}+\dot{\mathbf{D}}$	$\mathrm{div}\ \mathbf{D}=4\pi\rho$ $\mathrm{rot}\ \mathbf{E}=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}$ $\mathrm{div}\ \mathbf{B}=0$ $\mathrm{rot}\ \mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}+\frac{\dot{\mathbf{D}}}{4\pi})$
Célérité d'une onde électromagnétique dans un milieu	$v=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}$	$v=c/\sqrt{\varepsilon\mu}$
Relation entre E et H dans une onde électromagnétique	$E\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}=H\sqrt{\mu_0\mu}$	$E\sqrt{\varepsilon}=H\sqrt{\mu}$
Vecteur de Poynting	$\mathbf{S}=(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$	$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$

32. Constantes physiques universelles

Accélération de la chute libre (valeur normale)	$g=9{,}807$ m/s²
Célérité de la lumière dans le vide . .	$c=2{,}998\cdot10^{8}$ m/s
Charge élémentaire	$e=$ $1{,}602\cdot10^{-19}$ C $4{,}803\cdot10^{-10}$ u.é.s. CGS_q
Charge spécifique de l'électron	$e/m_e=$ $1{,}76\cdot10^{11}$ C/kg $5{,}27\cdot10^{17}$ u.é.s. CGS_q/g
Charge spécifique du proton	$e/m_p=$ $0{,}959\cdot10^{8}$ C/kg $2{,}87\cdot10^{14}$ u.é.s. CGS_q/g
Constante de Boltzmann	$k=1{,}380\cdot10^{-23}$ J/K
Constante diélectrique	$\varepsilon_0=0{,}885\cdot10^{-11}$ F/m $1/4\pi\varepsilon_0=9\cdot10^{9}$ m/F
Constante des gaz	$R=8{,}314$ J/mole
Constante de la gravitation universelle	$\gamma=6{,}67\cdot10^{-11}$ m³/(kg·s²)
Constante de Planck	$\hbar=$ $1{,}054\cdot10^{-34}$ J·s $0{,}659\cdot10^{-15}$ eV·s
Constante de Rydberg	$R_\infty=1{,}097\cdot10^{7}$ m⁻¹
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma=5{,}67\cdot10^{-8}$ W/(m²·K⁴)
Constante de Wien	$b=0{,}29$ cm·K
Energie de liaison de l'électron dans l'atome de l'hydrogène	$E=13{,}56$ eV
Longueur d'onde de Compton de l'électron	$\Lambda_e=3{,}86\cdot10^{-13}$ m
Magnéton de Bohr	$\mu_B=0{,}927\cdot10^{-23}$ J/T

Magnéton nucléaire	$\mu_N = 5{,}05\cdot10^{-27}$ J/T
Masse au repos de l'électron	$m_e = \begin{cases} 0{,}911\cdot10^{-27}\ \text{g} \\ 0{,}511\ \text{MeV} \end{cases}$
Masse au repos du proton	$m_p = 1{,}672\cdot10^{-24}$ g
Moments magnétiques :	
du proton	$\mu_p = 2{,}7928\ \mu_N$
du neutron	$\mu_n = -1{,}913\ \mu_N$
Nombre d'Avogadro	$N_A = 6{,}025\cdot10^{26}$ kmole^{-1}
Nombre de Faraday	$F = \begin{cases} 0{,}965\cdot10^{8}\ \text{C/kg} \\ 2{,}892\cdot10^{14}\ \text{u.é.s. CGS/Eq-g} \end{cases}$
Perméabilité magnétique	$\mu_0 = 1{,}257\cdot10^{-6}$ H/m
Rayon classique de l'électron	$r_e = 2{,}82\cdot10^{-15}$ m
Rayon de la première orbite de Bohr	$r_1 = 0{,}529\cdot10^{-10}$ m
Unité atomique de masse	1 u.a.m. $= \begin{cases} 1{,}660\cdot10^{-27}\ \text{kg} \\ 931{,}4\ \text{MeV} \end{cases}$
Volume d'une kilomole de gaz parfait aux conditions normales	$V_0 = 22{,}42$ m^3

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse:
Editions Mir, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique

RECUEIL DE PROBLÈMES D'ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Sous la direction de V. Vladimirov

320 pages 14,5 × 22 cm. Relié toile sous jaquette.

Le présent ouvrage est un recueil de problèmes qui fait largement appel à la théorie des fonctions généralisées et aux méthodes de l'analyse fonctionnelle. Il est destiné aux élèves des universités et des écoles techniques supérieures dont le programme de mathématiques est élargi et présente un intérêt certain pour les enseignants des écoles supérieures, les chercheurs, les ingénieurs.

FORCES EN EXPÉRIENCES PHYSIQUES

par V. Braguinski, A. Manoukine

160 pages 14,5 × 22 cm. Relié toile sous jaquette.

La monographie expose la théorie de la détection de l'action d'une force faible sur un système mécanique macroscopique. Est examinée l'influence fluctuationnelle inverse de l'appareil qui enregistre les petits déplacements compte tenu des restrictions macroscopiques quantiques. On y trouve l'analyse de la sensibilité de diverses antennes, la description de l'état actuel de la méthodologie des mesures et des perspectives de croissance de la resolution.

La monographie sera utile aux expérimentateurs, aux physiciens-chercheurs et aux étudiants des années terminales des spécialités physiques.